PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA • 2015. február 14.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ PRÓBAÉRETTSÉGI VIZSGA

MEGOLDÓKULCS

2015. február 14.

STUDIUM GENERALE MATEMATIKA SZEKCIÓ

MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS
– EMELT SZINT –

1) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget!
$\mathbf{3\cos x - 4\cos^2 x + 1 \geq -3\cos 2x}$ **(12 pont)**

Megoldás:

A $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azonosság felhasználásával a jobb oldal:
$-3\cos^2 x + 3\sin^2 x$ (1 pont)
A trigonometrikus Pitagorasz-tételt felhasználva alakítjuk tovább a jobb oldalt:
$-3\cos^2 x + 3 - 3\cos^2 x \Rightarrow 3 - 6\cos^2 x$ (2 pont)
Az egyenlőtlenséget 0-ra rendezzük:
$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 \geq 0$ (1 pont)
A másodfokúra visszavezethető kifejezés gyökei:

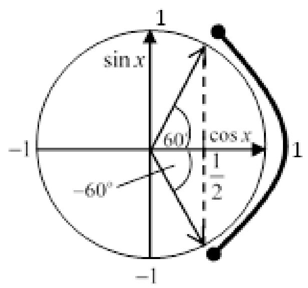
$\cos x_1 = \frac{1}{2}$
(2 pont)
$\cos x_2 = -2$

Mivel a másodfokúra visszavezethető kifejezés nagyobb, vagy egyenlő, mint 0, ezért:
$\cos x \geq \frac{1}{2}$, vagy $\cos x \leq -2$ (1 pont)
Csak az első egyenlőtlenséggel haladunk tovább, hiszen a koszinusz függvény értékkészletéből adódóan (-1)-nél kisebb értéket nem vehet fel! (1 pont)

A két hely, ahol a $\cos x$ függvény $\frac{1}{2}$:

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(2 pont)
$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

A két hely között találjuk azt az intervallumot, periódusonként, mely eleget tesz a fennmaradt egyenlőtlenségnek:
$\mathbf{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$ (2 pont)



(Természetesen az is jó megoldásnak számít, ha például egy periódussal későbbi megoldás intervallumot adunk meg: $\mathbf{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$)

Összesen: 12 pont

2)

a) **Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az** $f:[1;9[\to\mathbb{R}$**,** $f(x)=\left|x^2-8x+12\right|$ **függvényt!** **(4 pont)**

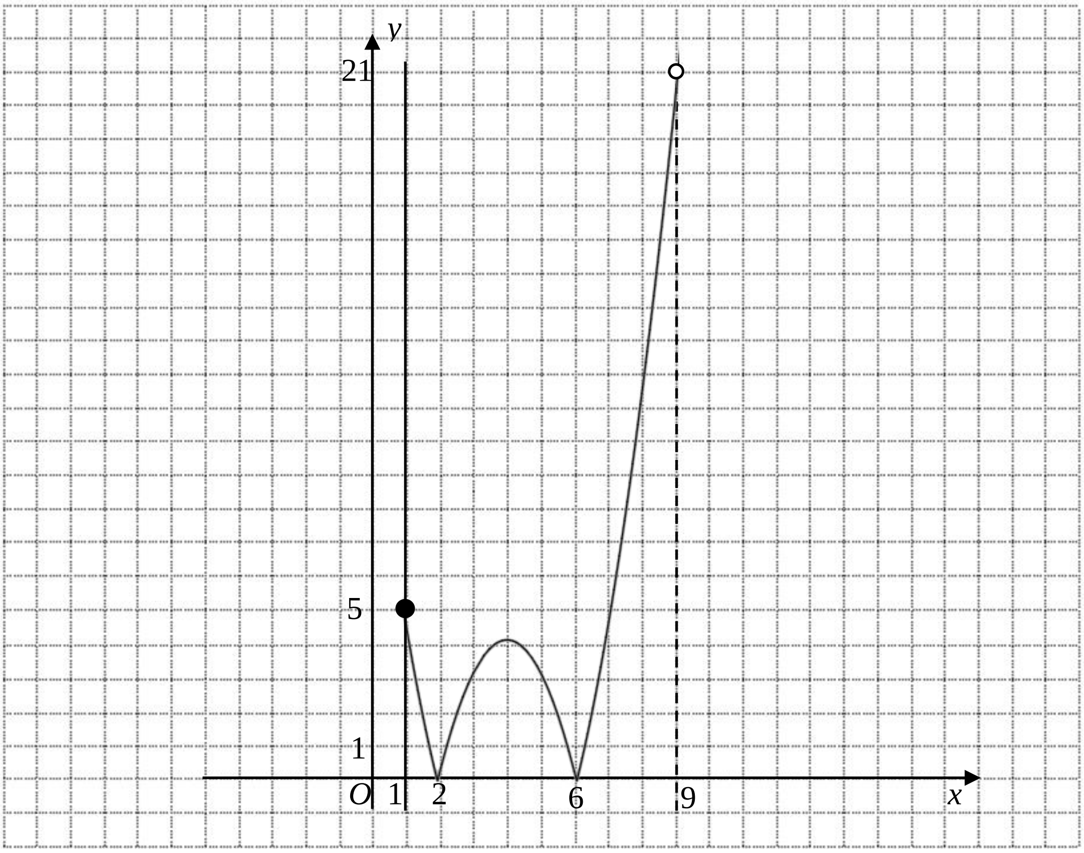
b) **Adja meg az *f* függvény értékkészletét!** **(2 pont)**

c) **A *p* valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az** $\left|x^2-8x+12\right|=p$ **egyenletnek az** $[1;9[$ **intervallumon?** **(8 pont)**

Megoldás:

a) $f(x)=\left|x^2-8x+12\right|=\left|(x-4)^2-4\right|$ (1 pont)

A helyes ábráért, helyes koordináta-rendszer felrajzolásáért, zérushelyek feltüntetésért jár a 3 pont. (3 pont)



b) A függvény értékkészletének két szélsőértéke adódik a függvény ábrájából. A függvény minimum értéke a 0. (1 pont)

A másik szélsőértéket megkapjuk, ha megvizsgáljuk, hogy $x=9$ helyen milyen értéket vesz fel a függvény (melyet azonban nem ér el): $x=9\Rightarrow f(x)=21$.

Tehát *f* értékkészlete: $[0;21[$. (1 pont)

c) Az ábrázolás alapján adódnak a lehetséges variációk. Ezek *p* értékétől függően: (1 pont)

Ha $p<0$, akkor nincs megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Ha $p=0$, akkor 2 megoldása van az egyenletnek. (1 pont)

Ha $0<p<4$, akkor 4 megoldása van az egyenletnek. (1 pont)

Ha $p=4$, akkor 3 megoldása van az egyenletnek. (1 pont)

Ha $4<p\le 5$, akkor 2 megoldása van az egyenletnek. (1 pont)

Ha $5<p<21$, akkor 1 megoldása van az egyenletnek. (1 pont)

Ha $21\le p$, akkor nincs megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 14 pont

3) Tekintse az alábbi két halmazt!

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x+3}\le 2x\right\}$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\log_{\frac{1}{5}}(7-x)>-1\right\}$$

Adja meg az $A\cup B$, $A\cap B$, $B\setminus A$ halmazokat! (12 pont)

Megoldás:

Először tekintsük az *A* halmazt. Az értelmezési tartomány a gyök miatt: $[-3;\infty[$ (1 pont)

Ahhoz, hogy az egyenlőtlenség négyzetre emelése ekvivalens átalakítás lehessen, vizsgálnunk kell a jobboldalt, mivel a baloldal miatt nemnegatívnak kell lennie. Ezután a belső kikötés alapján adódik:

$[0;\infty[$, ami a szűkebb értelmezési tartományt képviseli. (1 pont)

A négyzetre emelés után adódik:

$x+3\le 4x^2 \Rightarrow 0\le 4x^2-x-3$ (1 pont)

A másodfokú kifejezés gyökei, és ebből adódóan az intervallum:

$x_1=-\frac{3}{4};\ x_2=1$

$\left]-\infty;-\frac{3}{4}\right]\cup[1;\infty[$ (1 pont)

Az értelmezési tartománnyal egyeztetve:

$A=[1;\infty[$. (1 pont)

A *B* halmaz értelmezési tartománya a logaritmus miatt: $]-\infty;7[$. (1 pont)

Logaritmus azonosság alapján adódik:

$\log_{\frac{1}{5}}(7-x)>-1\Rightarrow \log_{\frac{1}{5}}(7-x)>\log_{\frac{1}{5}}5$ (1 pont)

Az $\frac{1}{5}$ alapú logaritmus szigorúan monoton csökkenő, ezért elhagyhatjuk a logaritmust mindkét oldalon, úgy, hogy a relációs jel irányát megváltoztatjuk:

$7-x<5\Rightarrow]2;\infty[$ (1 pont)

Az értelmezési tartomány egyeztetésével:

$B=]2;7[$. (1 pont)

Végül a halmazműveletek által képzett új halmazok a következők:

$\boldsymbol{A\cup B=[1;\infty[}$ (1 pont)

$\boldsymbol{A\cap B=]2;7[}$ (1 pont)

$\boldsymbol{B\setminus A=\varnothing}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

4)

a) Adott egy a_n számtani sorozat, melynek első tagja 6, differenciája pedig 4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek a számtani sorozatnak az első 2015 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztva egy olyan tagot kapunk, mely 13-mal osztva maradékul 5-öt ad? (7 pont)

b) Adott egy b_n mértani sorozat, melynek első tagja 6, kvóciense pedig 4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek a mértani sorozatnak az első 2016 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztva egy olyan tagot kapunk, mely 13-mal osztva maradékul 5-öt ad? (6 pont)

Megoldás:

a) A számtani sorozatban az első tagtól kezdve megfigyeljük a 13-mal való osztás maradékát. Ezek rendre: 6, 10, 1, 5, 9, 0, 4, 8, 12, 3, 7, 11, 2,... (1 pont)
Megfigyelhető, hogy az osztási maradékok ciklikusan váltakoznak, hiszen mindig 4-et adunk az előző számhoz. Tehát a maradékok folytatása 6, 10, 1, 5,… (1 pont)
A periódus 13, tehát minden 13. tag 13-mal osztva maradékul 5-öt ad. (2 pont)
Mivel a 2015. tagig $\frac{2015}{13}=155$ teljes ciklus megy végig, (1 pont)
a keresett valószínűség: $\mathbf{\frac{1}{13}}$. (2 pont)

b) A mértani sorozatban az első tagtól kezdve megint csak megfigyeljük a 13-mal való osztás maradékát. Ezek rendre: 6, 11, 5, 7, 2, 8,… (1 pont)
A maradékok ebben az esetben is ciklikusan váltakoznak, hiszen mindig 4-gyel szorozzuk az előző számot. Tehát a maradékok folytatása 6, 11, 5,… (1 pont)
A periódus 6, azaz minden 6. tag 13-mal osztva 5-öt ad maradékul. (2 pont)
A keresett valószínűség, mivel a 2016. tagig 336 teljes ciklus meg végbe: $\mathbf{\frac{1}{6}}$. (2 pont)

Összesen: 13 pont

Maximális elérhető pontszám: 51 pont

5) Egy átlagos magyar mezőgazdaság 780 egyedet számláló állatállománya tehenekből és szárnyasokból áll. Ezen állatok 65%-át a húsukért tartják, 35%-át pedig a „termékeik" (pl. tojás, tej) miatt. A húsukért tartott állatok és a teljes állatállomány aránya $\frac{13}{10}$-szer akkora, mint a húsukért tartott tehenek és az összes tehén számának aránya. A húsukért tartott tehenek aránya az összes tehén között $\frac{8}{11}$-szer akkora, mint amekkora ez az arány a szárnyasok között.

a) Hány tehén és hány szárnyas van a mezőgazdaságban? A számításait végig pontos értékekkel végezze! (12 pont)

Valójában az egész mezőgazdaság csak virtuális és az interneten egy alkalmazás keretein belül létezik. Viki a játék megszállottja más ismerőseivel egyetemben aktívan egyengeti kis tanyájának életét. Egy szép délutánon Farm találkozót szerveznek, hogy élőben vitassák meg a virtuális eseményeket. Viki 2 másik játékosra kicsit haragszik, mert azok nem küldözgetnek neki ajándék takarmányt.

b) Ha a találkozó elején csak azokkal hajlandó pacsizni, akikre nem haragszik, rajta kívül viszont mindenki mindenkivel pacsizik, akkor hányan lehetnek a találkozón Vikivel együtt, ha összesen 118 pacsi születik? (4 pont)

Megoldás:

a) Jelölje t a tehenek számát, sz pedig a szárnyasok számát a mezőgazdaságban. A szárnyasok száma ekkor:

$sz = 780 - t$ (1 pont)

A húsukért tartott állatok aránya a teljes állatállományban 780-nak a 65%-a, azaz 507 darab. (1 pont)

A húsukért tartott állatok aránya a teljes állatállományban 0,65. Ennek a $\frac{10}{13}$-ad része 0,5, tehát a tehenek felét tartják a húsukért. (1 pont)

A húsukért tartott állatok száma a szárnyasok között az előző arányszámnak a $\frac{11}{8}$-szorosa:

$0,5 \cdot \frac{11}{8} = 0,6875$ (2 pont)

Tehát a húsukért tartott tehenek száma $0,5t$. (1 pont)

A húsukért tartott szárnyasok száma pedig $0,6875 \cdot (780 - t)$. (1 pont)

A kettő összegét ismerjük a korábbi számításunkból, így adódik az egyenlet:

$0,5t + 0,6875 \cdot (780 - t) = 507$ (1 pont)

Ezt végigoldva:

$0,5t + 536,26 - 0,6875t = 507$

$-0,1875t = -29,25$ (2 pont)

$t = 156 \Rightarrow sz = 780 - 156 = 624$

Tehát a mezőgazdaságban 156 darab tehén és 624 darab szárnyas van. (1 pont)

Ellenőrizni kell, hogy bár a végeredmények egész számok, vajon a további megkülönböztetett csoportok is egész számot adnak-e. A húsukért tartott tehenek száma 78, a húsukért tartott szárnyasok száma pedig 429, így a megoldás valóban helyes! (1 pont)

b) A találkozón résztvevők számát jelöljük n-nel, Vikivel együtt. A feladat szövegéből tudjuk, hogy Viki $n-3$ résztvevővel pacsizott, hiszen önmagával és két másik ismerősével nem érintkezett. Tudjuk továbbá, hogy a maradék $n-1$ résztvevő közül mindenki mindenkivel pacsizott. (1 pont)

Tehát fel tudjuk írni az alábbi egyenletet, az egyszerű gráf éleinek számát megadó képlet segítségével:

$$\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}+n-3=118$$ (1 pont)

(Természetesen az is jó logikai menet és jár érte a pont, ha abból indulunk ki, hogy 2-vel kevesebb pacsizás történt annál, mintha mindenki mindenkivel pacsizott volna. Azaz:

$$\frac{n(n-1)}{2}=120\,.)$$

Az egyenletet rendezve, és n gyökeit kiszámolva kapjuk:

$$n^2-n-240=0$$

$$n_1=-15;\ n_2=16$$ (1 pont)

Mivel élő emberekről beszélünk, ezért a negatív gyök nem ad jó megoldást, tehát **Vikivel együtt 16 résztvevő volt a találkozón**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Adott egy egyenlőszárú háromszög, melyről tudjuk, hogy szárainak hossza $\sqrt{65}$ egység, metszéspontjuk pedig a $C(1;-5)$ pontba esik. A háromszög másik két csúcsa (*A*, *B*) illeszkedik a $4y+8=(x-1)^2$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki a másik két csúcs koordinátáit! (6 pont)

b) Írja fel az *ABC* háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ez az egyenes a parabolát még egy pontban metszi (*D*). Határozza meg a *D* pont koordinátáit! (6 pont)

c) Vica és Tomi matematika csoportja dolgozatot írt a fenti két feladatból. A maximálisan megszerezhető 10 pontból a diákok a következő pontszámokat érték el: 8, 6, 8, 9, 10, 6, 3, 5, 4, 9, 5, 9. Adja meg a pontszámokból álló adatsokaság mediánját és móduszát és értelmezze is azokat! (4 pont)

Megoldás:

a) A háromszög másik két csúcsa rajta van a *C* középpontú $\sqrt{65}$ egység sugarú körön. Ezen kör egyenlete:

$(x-1)^2+(y+5)^2=65$ (1 pont)

A maradék két csúcs és a parabola metszéspontjait a kör és a parabola egyenlete által alkotott egyenletrendszer gyökei adják meg:

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } (x-1)^2+(y+5)^2=65 \\ \text{II. } 4y+8=(x-1)^2\end{array}\right\}$$ (1 pont)

Láthatjuk, hogy mindkét egyenletben szerepel az $(x-1)^2$ kifejezés, ami a második egyenletben ki is van fejezve. Ezt visszahelyettesítjük az első egyenletbe, majd továbbalakítjuk:

$4y+8+(y+5)^2=65$

$4y+8+y^2+10y+25=65$ (1 pont)

$y^2+14y-32=0$

A másodfokú kifejezés gyökei $y_1=-16$ és $y_2=2$, melyek közül csak az $y_2=2$ ad megoldást, hiszen $y_1=-16$ esetén *x* nem esik a valós számok halmazába. (1 pont)

Az $y=2$ gyököt visszahelyettesítve a második egyenletbe adódik:

$4\cdot 2+8=(x-1)^2$

$4=|x-1|$ (1 pont)

$x_1=-3;\ x_2=5$

Tehát a két pont koordinátái: $\boldsymbol{A(5;2)}$, $\boldsymbol{B(-3;2)}$. (1 pont)

b) Vegyük az AC szár egyenesének egyenletét a két ponton átmenő egyenes egyenletéből kiindulva:

$(-5-2)\cdot(x-5)=(1-5)\cdot(y-2)$ (1 pont)

A zárójeleket felbontva:

$\mathbf{7x-4y=27}$ (1 pont)

(A BC szár egyenesének egyenlete: $\mathbf{7x+4y=-13}$)

A D pont koordinátáit az AC szár egyenesének és a görbe egyenletének A csúcstól különböző metszéspontja adja meg:

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } 7x-4y=27\\ \text{II. } 4y+8=(x-1)^2\end{array}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenletből y-t kifejezve és azt a második egyenletbe behelyettesítve:

$7x-27+8=x^2-2x+1$

$x^2-9x+20=0$ (1 pont)

Az egyenletrendszer A csúcstól különböző megoldáspárja: $x=4 \Rightarrow y=\frac{1}{4}$. (1 pont)

A D csúcs koordinátái tehát: $\boldsymbol{D\left(4;\frac{1}{4}\right)}$ (1 pont)

(A BC szár egyenesének B csúcstól különböző metszéspontja a görbével: $\boldsymbol{D\left(-2;\frac{1}{4}\right)}$)

c) A medián meghatározásához növekvő sorrendbe rendezzük a pontszámokat. A medián a sorba rendezett sokaság középső két tagjának (6. és 7. tag) átlaga, mivel páros számú sokaságról beszélünk:

3, 4, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 9, 9, 9, 10

$\frac{6+8}{2}=\mathbf{7}$. (1 pont)

Tehát Vica és Tomi matematika csoportjának diákjai által elért pontszámok egyik fele kisebb, másik fele nagyobb, mint 7 pont. (1 pont)

A módusz egy adatsokaság leggyakrabban előforduló eleme. Az adatsokaságban a 9 pont fordul elő a leggyakrabban, tehát a módusz **9**. (1 pont)

Vica és Tomi matematika csoportjának diákjai által elért pontszámok között 9 pontos eredmény szerepelt a legtöbbször. (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Adott egy érintőnégyszög, melyről tudjuk, hogy 3 oldalának aránya 2:4:7, illetve két szemben lévő oldalának összege 11,25 cm.

a) Mekkorák az érintőnégyszög oldalai? (13 pont)

Matematika órán Péter, Olivér és Sándor megoldották a fenti példát, és vitába keveredtek, mert mindhármuknak más eredmény jött ki. A következő állításokat tették:

Péter: „Ilyen érintőnégyszög nem létezik!”

Olivér: „Az érintőnégyszög egyik oldala 5 cm hosszú!”

Sándor: „Az érintőnégyszögnek van olyan oldala, mely 2,1 cm-nél is rövidebb!”

b) Melyikük állítása igaz a feltételnek megfelelő érintőnégyszögre? (3 pont)

Megoldás:

a) Az érintőnégyszög-tétel alapján a szemközti oldalak összege egyenlő, így párban két-két szemközti oldal összege a négyszögnek 11,25 cm. Ha az érintőnégyszög oldalait sorrendben *a*, *b*, *c*, *d*-vel jelöljük:

$a+c=b+d=11,25$ (1 pont)

A megadott arányszámok nem feltétlenül követik az oldalak sorrendjét a négyszögben, ezért három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a három arányszám közül melyik két oldal van egymással szemben. (2 pont)

	arány egysége	a	b	c	d
1. négyszög	$9x=11,25$ $x=1,25$	$2x$	$4x$	$7x$	$11,25-5=$ **6,25 cm**
		$2\cdot 1,25=$ **2,5 cm**	$4\cdot 1,25=$ **5 cm**	$7\cdot 1,25=$ **8,75 cm**	
2. négyszög	$6y=11,25$ $y=1,875$	$2y$	$7y$	$4y$	$11,25-13,25=$ -2 cm **nincs ilyen érintő négyszög!**
		$2\cdot 1,875=$ 3,75 cm	$7\cdot 1,875=$ 13,125 cm	$4\cdot 1,875=$ 7,5 cm	
3. négyszög	$11z=11,25$ $z\approx 1,023$	$4z$	$2z$	$7z$	$11,25-2,045\approx$ **9,20 cm**
		$4\cdot 1,023\approx$ **4,09 cm**	$2\cdot 1,023\approx$ **2,05 cm**	$7\cdot 1,023\approx$ **7,16 cm**	

A (helyesen) vizsgált esetenként 3-3 pont jár. (9 pont)

Tehát a 2. négyszög nem létezik, mivel a negyedik oldala negatív lenne, ami nem lehetséges egy síkidomnál. A másik két megoldás adódik a táblázatból. (1 pont)

b) Mindhárman egy-egy esettel találkoztak a feladat megoldása során. Péter állítása a második esethez tartozó érintőnégyszögre igaz, Olivér állítása az első esethez tartozó érintőnégyszögre igaz, Sándor állítása pedig a harmadik esethez tartozó érintőnégyszögre igaz. **Tehát a saját megoldásukat tekintve mindhármuk állításának van igazságértéke, hiszen vannak olyan érintőnégyszögek, amelyekre a fenti táblázat bizonyos esetei igazak**. (3 pont)

(Természetesen az is jó válasznak minősül, hogy összességében egyiknek sincs igaza, hiszen egyikük sem az összes esetről tett állítást, azonban fontos kiemelnünk, hogy mindhármuknak egy adott esetet tekintve igazuk volt.)

Összesen: 16 pont

8) Katinka egy különleges kocka dobálgatásával tölti unalmas perceit. A kocka attól különleges, hogy 10% eséllyel az egyik élén áll meg, ekkor Katinka úgy veszi, mintha 0-t dobott volna.

a) Katinka hatszor dob a kockával és minden egyes dobás „értékét" felírja egy papírra. A 6. dobás után hány különböző hatjegyű szám szerepelhet a papírlapján? (3 pont)

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a 6 dobásból legfeljebb kétszer párost dobott? Az eredményt 3 tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

c) Az előző izgalmas játék után Katinka ötvenszer egymás után dobott a kockával. Ötször azt tapasztalta, hogy az élén állt meg. Ha az előző 50 dobásból emlékezete alapján véletlenszerűen kiválaszt 20 dobást, mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott dobások közül kétszer az élén állt meg a kocka? Az eredményt 1 tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

Megoldás:

a) Mivel a kocka az élére is állhat, ezzel 0-t dobván, 7 különböző értéket lehet dobni. (1 pont)
Mivel egy hatjegyű szám nem kezdődhet 0-val (hiszen onnantól kezdve csak ötjegyű számról beszélhetünk), ezért az első helyiértékre 6 féle érték, a maradék 5 helyiértékre 7 féle érték kerülhet. (1 pont)
$\underline{6}\cdot\underline{7}\cdot\underline{7}\cdot\underline{7}\cdot\underline{7}\cdot\underline{7}=6\cdot 7^5=100842$, tehát **100 842 különböző hatjegyű számot** képezhet. (1 pont)

b) Mivel a kockadobásoknál van $\frac{1}{10}$ esély arra, hogy az élén áll meg a kocka, és ezáltal 0-t dobott Katinka, a maradék hatféle érték dobásának valószínűsége:
$$\frac{9}{10}\div 6=\frac{3}{20}$$ (2 pont)
A páros számú értékek, amelyeket dobhat: 0, 2, 4, 6. (1 pont)
Tehát annak a valószínűsége, hogy 1 dobás során a dobott szám értéke páros:
$$p=\frac{1}{10}+3\cdot\frac{3}{20}=\frac{11}{20}$$ (1 pont)
(Ha kihagyta, vagy elfelejtette, hogy az élére is állhat a kocka, akkor nem jár az ezt megelőző 4 pont! Azonban, ha innentől a megfelelő logikai menetet követve halad tovább a következő pontok megadhatóak!)
A binomiális eloszlás képletét alkalmazva adódik:
$$\sum_{k=0}^{2}\binom{6}{k}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^k\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^{6-k}=$$
$$\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^0\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^6+\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^5+\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{11}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{20}\right)^4=$$ (2 pont)
$$=\frac{531441+3897234+11908215}{64000000}=\frac{16336890}{64000000}\approx 0,2553$$ (2 pont)
Tehát annak a valószínűsége, hogy Katinka 6 dobásából legfeljebb kétszer dobott páros értékű számot **0,255**. (1 pont)

c) A hipergeometrikus eloszlás képletét alkalmazva:
$$P=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{45}{18}}{\binom{50}{20}}\approx\frac{10\cdot 1,716\cdot 10^{12}}{4,713\cdot 10^{13}}\approx 0,3641$$ (3 pont)
Tehát annak a valószínűsége, hogy az 50 dobásból véletlenszerűen 20-at kiválasztva a kiválasztott dobások közül kétszer az élén állt meg a kocka **0,4**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) Adott az alábbi függvény!

$\boldsymbol{f:]-2;2[\to \mathbb{R};\ f(x) = x^3 - x^2 - 5x}$

a) Elemezze f függvényt zérushelyei, monotonitása, valamint lokális szélsőértékeinek helye és értéke alapján a deriváltfüggvényének segítségével! (12 pont)

b) Adja meg azt a $g:]-2;2[\to \mathbb{R}$ függvényt, amelynek deriváltfüggvénye f, tehát $g' = f$, és ezen kívül $g(1) = 0$ is teljesül! (4 pont)

Megoldás:

a) Az f függvény zérushelyeit megkapjuk, ha először szorzattá alakítjuk a kifejezést:

$x^3 - x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (1 pont)

Végül alkalmazzuk a másodfokú függvény megoldóképletét:

$x^2 - x - 5 = 0$

$x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \Rightarrow x_2 \approx 2,79;\ x_3 \approx -1,79$ (1 pont)

Ügyelünk az értelmezési tartományra ($]-2;2[$), mely alapján a **0 és a $-1,79$ lesz *f* zérushelye**!

(1 pont)

Az f függvény deriváltfüggvénye a következő:

$(f:]-2;2[\to \mathbb{R})\ f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$. (1 pont)

A másodfokú megoldóképlet segítségével meghatározzuk f' zérushelyeit:

$3x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{5}{3}$. (1 pont)

Mivel f' függvény főegyütthatója pozitív, ezért tudhatjuk, hogy f' értékei $-2 < x < -1$ esetén pozitívak, $-1 < x < \dfrac{5}{3}$ esetén negatívak, $\dfrac{5}{3} < x < 2$ esetén pozitívak. (1 pont)

Vizsgálnunk kell azt is, hogy az értelmezési tartomány két határán nincs-e a függvénynek lokális szélsőértéke! Ebben az esetben nincs. (1 pont)

x	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{5}{3}$	$x = \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < 2$
f'	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
f	szig. mon. nő ↗	lokális maximum $f(-1) = 3$	szig. mon. csökken ↘	lokális minimum $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{175}{27}$	szig. mon. nő ↗

Ezek alapján az f függvény menete:

A $]-2;-1]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő. (1 pont)

Az $x = -1$ helyen lokális maximuma van, melynek értéke 3. (1 pont)

A $\left[-1;\frac{5}{3}\right]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő. (1 pont)

Az $x = \frac{5}{3}$ helyen lokális minimuma van, melynek értéke $-\frac{175}{27}$. (1 pont)

A $\left[\frac{5}{3};2\right[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő. (1 pont)

b) Gyakorlatilag f függvény egy konkrét primitív függvényét keressük, melyet g jelöl:

$$g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+c\ (c\in\mathbb{R})$$ (1 pont)

Tudjuk még, hogy a g függvény az 1 helyen a 0 értéket veszi fel, ebből kiszámoljuk c értékét:

$$g(1)=0\Rightarrow\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}-\frac{5\cdot1^2}{2}+c=0$$

$$c=\frac{31}{12}$$ (2 pont)

Tehát a keresett primitív függvény:

$$\boldsymbol{g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+\frac{31}{12}}$$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

Maximális elérhető pontszám: 64 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 115 pont