MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS

– KÖZÉPSZINT –

I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!

1) Egyszerűsítse a következő kifejezést: $\boldsymbol{\frac{a^2-b^2}{b+a}:\frac{a^2b-ab^2}{ab}}$**, ahol** $\boldsymbol{a \neq -b}$ **és** $\boldsymbol{a,b \neq 0}$**!**

Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$$\frac{a^2-b^2}{b+a}:\frac{a^2b-ab^2}{ab}=\frac{(a-b)(a+b)}{a+b}\cdot\frac{ab}{ab(a-b)}=\mathbf{1}$$ (3 pont)

Összesen: 3 pont

2) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\mathbf{8^x=\sqrt{128}}$$

Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$8^x=\sqrt{128}$

$2^{3x}=\sqrt{2^7}$ (1 pont)

$2^{3x}=2^{\frac{7}{2}}$ Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt... (1 pont)

$3x=\frac{7}{2}$

$x=\frac{7}{6}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

3) Juditot az ebédszünet után az alábbi üzenet fogadta az asztalán, a munkahelyén:

„Kedves Judit!

Kérlek, vegyél 45 db csipogót a boltban! A délelőtti vásárláskor kiderült, hogy 50000 forint kevés a megvételükre, és megtudtuk, hogy a 45 darab $X991Y$ forintba fog kerülni. Ezek a holnapi tanácsülésre kellenek majd, pénzt találsz a fiókban.

Segítségedet előre is köszönöm,
Dávid"

Sajnos az összeg első és utolsó számjegye elmosódott. Mennyibe kerül a 45 darab csipogó? Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

Egy szám akkor osztható 45-tel, ha 5-tel és 9-cel is osztható. Az 5-tel való oszthatóság akkor teljesül, ha a szám 5-re vagy 0-ra végződik. A 9-cel való oszthatóság feltétele pedig, hogy a számjegyek összegének oszthatónak kell lennie 9-cel. (1 pont)

I. eset:

$Y = 5;\ X = 3 \Rightarrow 39915$

II. eset:

$Y = 0;\ X = 8 \Rightarrow 89910$ (1 pont)

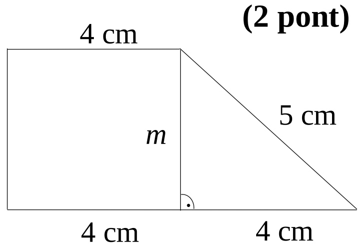
Mivel csak a II. esetben teljesül, hogy a 45 db csipogó drágább, mint 50000, ezért a **89910** lesz a megoldásunk.

Összesen: 2 pont

4) Mekkora a derékszögű trapéz magassága, ha az alapjai 4 és 8 cm, a hosszabbik szára pedig 5 cm hosszú? (2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{m} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9}$ **= 3 cm** (2 pont)



Összesen: 2 pont

5) Adja meg az $A \setminus B$ illetve az $A \cap B$ halmaz elemeit, ha az A halmaz az egyjegyű prímszámok, a B halmaz pedig a 20 pozitív osztóinak halmaza! (2 pont)

Megoldás:

$A = \{2;\ 3;\ 5;\ 7\}$

$B = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 10; 20\}$

$\boldsymbol{A \setminus B = \{3;\ 7\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{A \cap B = \{2;\ 5\}}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

6) Határozza meg y értékét úgy, hogy az $\vec{a}(3;-4)$ és a $\vec{b}(2;y)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra! (2 pont)

Megoldás:

Két vektor akkor, és csak akkor merőleges egymásra, ha a skalárszorzatuk 0.

$3\cdot 2+(-4)\cdot y=0$ (1 pont)

$\boldsymbol{y=\frac{3}{2}}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

7) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=-3+\cos 2x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

A koszinusz függvény értékkészlete: $[-1;1]$ (1 pont)

A $\cos 2x$ függvénynek ugyanez az értékkészlete.

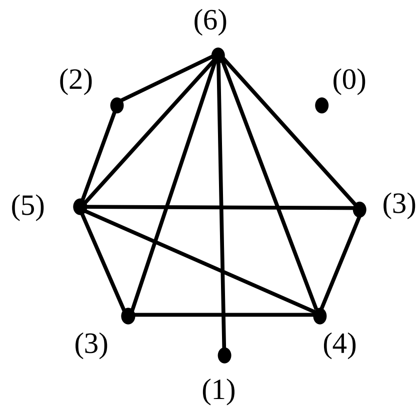
A -3 miatt a függvényt az y tengely mentén negatív irányba tolom 3 egységgel, így az új értékkészlet: $\boldsymbol{y\in[-4;-2]}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

8) Rajzoljon egy olyan 8 csúcsú egyszerű gráfot, melyben a fokszámok összege 24, és van izolált, illetve elsőfokú pontja is! (3 pont)

Megoldás:

A fokszámok összege 24. (1 pont)
Van izolált pont. (1 pont)
Van elsőfokú pont. (1 pont)
(Más megoldás is elfogadható.)



Összesen: 3 pont

9) Oldja meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán!

$$\sqrt{(x+5)^2}=6$$

Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$\sqrt{(x+5)^2}=6$

$|x+5|=6$ (1 pont)

I. eset: $x\geq -5 \Rightarrow x+5=6 \Rightarrow \boldsymbol{x_1=1}$ (1 pont)

II. eset: $x<-5 \Rightarrow x+5=-6 \Rightarrow x_2=-11 \qquad -11\notin \mathbb{N}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

10) Adja meg a következő sokaság: 10, 11, 12, ... 97, 98, 99 átlagát és mediánját! (3 pont)

Megoldás:

A sokaság eleminek az összege: $90 \cdot \frac{10+99}{2} = 4905$ (1 pont)

Átlag: $\frac{4905}{90} = \mathbf{54{,}5}$ (1 pont)

A sokaság középső két eleme az 54 és az 55.
Ezek számtani közepe a medián:

Medián: $\frac{54+55}{2} = \mathbf{54{,}5}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Egy gimnázium folyosóján 5 fiú és 5 lány szeretne leülni úgy egy hosszú padra, hogy az azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé. Hányféleképpen tehetik ezt meg? (3 pont)

Megoldás:

I.eset: F L F L F L F L F L
II.eset: L F L F L F L F L F
Mivel számít a sorrend, a fiúk és a lányok külön-külön 5! féleképpen ülhetnek le. (1 pont)
Együtt $5! \cdot 5!$ ként ülhetnek le. (1 pont)
A leülés sorrendje kezdődhet fiúval illetve lánnyal is, ezt két külön esetnek számítjuk. Ezért a megoldásunk:
$5! \cdot 5! \cdot 2 = \mathbf{28800}$ (1 pont)

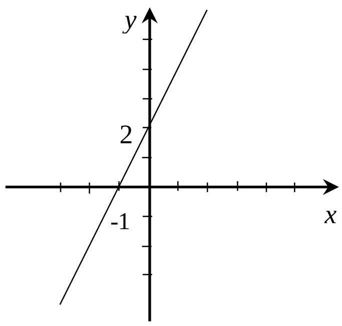
Összesen: 3 pont

12) Melyik hozzárendelési szabály felel meg az ábrán látható függvénynek?

$\boldsymbol{f: 2y = 4x + 2}$

$\boldsymbol{g: \frac{y}{2} = x - 1}$

$\boldsymbol{h: y - 2x = 2}$ **(2 pont)**



Megoldás:

$f: 2y = 4x + 2 \Rightarrow y = 2x + 1$

$g: \frac{y}{2} = x - 1 \quad \Rightarrow y = 2x - 2$

$h: y - 2x = 2 \quad \Rightarrow y = 2x + 2$ (1 pont)

A helyes hozzárendelési szabály: $\boldsymbol{h: y - 2x = 2}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

Maximális elérhető pontszám: 30 pont

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

13.

a) **Zsuzsi egy új könyvből elolvasott 20 oldalt. Elhatározta, hogy a következő napokban minden nap 10 oldallal fog többet olvasni, az előző napi adaghoz képest. Hány oldalas a könyv, ha 11 nap alatt olvassa ki, és a 11. napra már csak 7 oldal maradt hátra?** **(4 pont)**

b) **Dani ma kezdett el egy másik könyvet olvasni. Az 514 oldalas könyvből első nap 30 oldalt, majd minden nap az előző naphoz képest 10%-kal többet olvas el. Hány nap alatt olvassa ki a könyvet Dani?** **(4 pont)**

c) **Dani és Zsuzsi találkoztak, és eladták a könyveiket 10000 Ft-ért. A kapott összeget bankba rakták 15 évre kamatozni. Mekkora az évi kamat, ha 15 év után 100000 Ft-ot vehetnek ki a bankból?** **(4 pont)**

Megoldás:

a) Számtani sorozattal oldjuk meg a feladatot.
A könyv oldalainak száma: $S_{10}+7$ (1 pont)

$a_1=20$

$d=10$

Felírva a számtani sorozat összegképletét:

$$S_{10}=10\cdot\frac{2\cdot 20+9\cdot 10}{2}=650$$ (1 pont)

$650+7=\mathbf{657}$ (1 pont)

Tehát Zsuzsi 657 oldalas könyvet olvas. (1 pont)

b) Mértani sorozatként értelmezzük a feladatot.

$a_1=30$

$q=1{,}1$

Felírva az összegképletet, az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}\Rightarrow 514\le 30\frac{1{,}1^n-1}{1{,}1-1}\Rightarrow 1{,}1^n\ge\frac{407}{150}$$ (1 pont)

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve:

$$\lg\left(1{,}1^n\right)=\lg\left(\frac{407}{150}\right)\Rightarrow n\lg(1{,}1)=\lg\left(\frac{407}{150}\right)$$ (1 pont)

$$n=\frac{\lg\left(\frac{407}{150}\right)}{\lg(1{,}1)}=10{,}47$$ (1 pont)

Azaz **11 nap** alatt olvassa ki a könyvet. (1 pont)

c) A szöveg alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$100000=10000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{15}$$ (1 pont)

$$10=\left(1+\frac{p}{100}\right)^{15}$$

$$1+\frac{p}{100}=\sqrt[15]{10}\approx 1{,}1659$$ (1 pont)

$\boldsymbol{p=16{,}59\%}$ (1 pont)

Tehát az éves kamat 16,59%. (1 pont)

Összesen: 12 pont

14.

a) Oldja meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán!

$$\log_3 x + \log_x 9 = 3$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a $]-5;\, 10]$ intervallumon!

$$\frac{x+21}{9-x} \ge 1$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Kikötés: $x > 0;\ x \neq 1$ (1 pont)

$\log_3 x + \log_x 9 = 3 \Rightarrow \log_3 x + \dfrac{\log_3 9}{\log_3 x} = 3$ $\qquad a = \log_3 x$ (1 pont)

$a + \dfrac{2}{a} = 3 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1;\ a_2 = 2$ (2 pont)

$a_1 = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow$ $\mathbf{x_1 = 3}$ (1 pont)

$a_2 = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow$ $\mathbf{x_2 = 9}$ (1 pont)

b) Kikötés: $x \neq 9$ (1 pont)

$\dfrac{x+21}{9-x} \ge 1$

$\dfrac{x+21}{9-x} - 1 \ge 0 \Rightarrow \dfrac{2x+12}{9-x} \ge 0$ (1 pont)

Egy tört akkor nemnegatív, ha a számláló és a nevező előjele megegyezik vagy a számláló 0. (1 pont)

I. eset:

A számláló nemnegatív a nevező pozitív.

$x \ge -6$ és $x < 9 \Rightarrow -6 \le x < 9$ (1 pont)

II. eset:

A számláló és a nevező is negatív:

$x < -6$ és $x > 9 \Rightarrow$ nincs közös intervallum (1 pont)

A feladat szövegében lévő alapintervallummal összevetve a megoldás: $\mathbf{x \in \left]-5;9\right[}$ (1 pont)

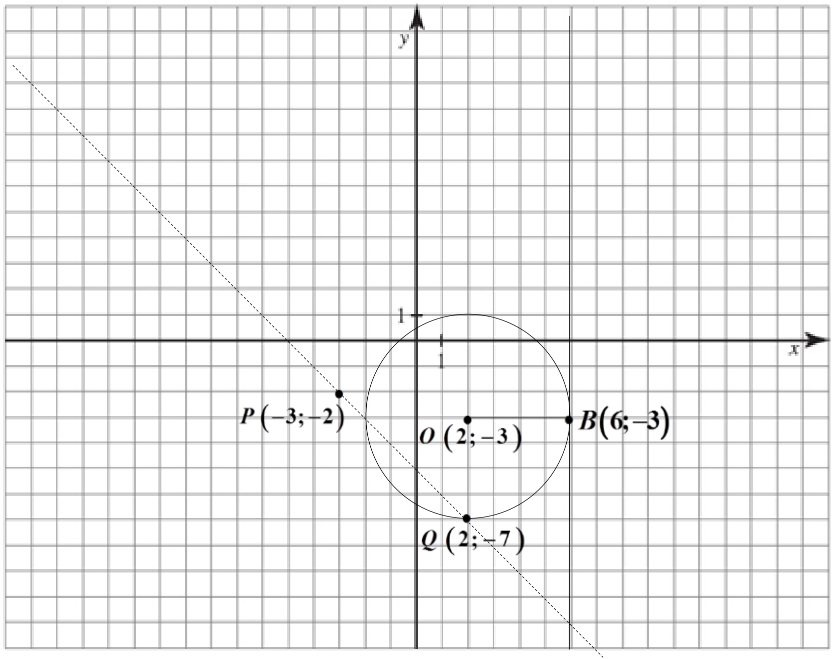
Összesen: 12 pont

15.

a) **Határozza meg annak az érintőnek az egyenletét, amely az $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ egyenletű kört a $B(6;-3)$ pontban érinti!** **(4 pont)**

b) **Milyen hosszú húrt metsz ki a $P(-3;-2)$ és a $Q(2;-7)$ pontokon áthaladó egyenes a körből?** **(8 pont)**

Megoldás:



a) A kör középpontja: $O(2;-3)$ (1 pont)

Mivel a sugár merőleges az adott pontba húzott érintőre, $\overrightarrow{OB}$ lesz a normálvektor. (1 pont)

$\overrightarrow{OB}(6-2;-3+3)=\overrightarrow{OB}(4;0)\Rightarrow \vec{n}(1;0)$ (1 pont)

Az érintő egyenes egyenlete:

$1\cdot x+0\cdot y=1\cdot 6-0\cdot(-3)\Rightarrow \mathbf{x=6}$ (1 pont)

b) A $\overrightarrow{PQ}$ vektor lesz az irányvektorunk, amit ha elforgatunk 90°-kal, megkapjuk a normálvektort.

$\overrightarrow{PQ}(5;-5)\Rightarrow \vec{v}(1;-1)\Rightarrow \vec{n}(1;1)$ (1 pont)

$Q(2;-7)$ pontban felírt egyenes egyenlete:

$x+y=2-7$

$y=-x-5$

(Vagy két ponton átmenő egyenes egyenletével) (1 pont)

Behelyettesítjük a kör egyenletébe:

$(x-2)^2+(-x-5+3)^2=16$

$x^2-4x+4+x^2+4x+4=16\Rightarrow x^2=4$ (2 pont)

$x_1=2 \quad\Rightarrow y_1=-7\Rightarrow Q(2;-7)$ (1 pont)

$x_2=-2\Rightarrow y_2=-3\Rightarrow T(-2;-3)$ (1 pont)

$\overrightarrow{TQ}(2-(-2);-7-(-3))=\overrightarrow{TQ}(4;-4)\Rightarrow \left|\overrightarrow{TQ}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=\mathbf{4\sqrt{2}\approx 5{,}66}\ \boldsymbol{e}$ (1 pont)

Tehát 5,66 egység hosszú a húr. (1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36 pont

II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16.

a) Dóri és Anna társasestet tartanak. Az „Itt a piros, hol a piros?”-sal kezdenek, azonban kicsit nehezítenek a játékon. Dóri egy piros és két fehér golyót helyez el 3 egyforma, fekete dobozba úgy, hogy mindegyikbe csak egy golyót tesz, amiket ezután 2 fiókban helyez el. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha Anna találomra kihúz egy fiókot, akkor a piros golyót tartalmazó dobozt veszi ki, ha a keresett doboz egymagában van a fiókban? (2 pont)

b) Az est folyamán egy olyan szabályos játékkockával is játszanak, amelynek egyik oldalán 0, két oldalán 2-es, három oldalán pedig 4-es szerepel. A kockát ötször feldobják, és az eredményeket a dobott sorrendben leírják egy lapra. Hányféle 6-tal osztható ötjegyű számot kaphatnak eredményül? (7 pont)

c) Kockajáték után a 32 lapos magyar kártyát veszik elő. Mind a két lány nyolc lapot kap. Mekkora a valószínűsége annak, hogy Anna kezében legalább 2 makk van? (Egy pakli magyar kártyában 4 darab szín van, illetve 8 darab figura minden színből.) (6 pont)

d) Tagadja a következő állítást!
„Mindig Dóri nyer.” (2 pont)

Megoldás:

a) Mivel a doboz egymagában áll a fiókban, csak azt kell vizsgálni, mennyi a valószínűsége, hogy eltalálja a fiókot. Mivel 2 fiók van a keresett valószínűség **0,5**. (2 pont)

b) Egy szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal. 2-vel akkor osztható, ha páros. Mivel most mindegyik szám páros, ezért ez biztosan teljesülni fog. 3-mal akkor osztható egy szám, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal. (1 pont)

Kedvező esetek:

$$2;2;2;0;0 \Rightarrow \frac{4!}{2!\cdot 2!} \Rightarrow 6$$

Csak kettessel kezdődhet az ötjegyű szám, így a maradék négy számjegy sorrendjét meghatározzuk ismétléses permutációval.

$$4;4;4;0;0 \Rightarrow \frac{4!}{2!\cdot 2!} \Rightarrow 6$$

Csak négyessel kezdődhet az ötjegyű szám, így a maradék négy számjegy sorrendjét meghatározzuk ismétléses permutációval.

$$4;4;2;2;0 \Rightarrow \frac{2\cdot 4!}{2!} \Rightarrow 24$$

Csak négyessel vagy kettessel kezdődhet az ötjegyű szám, így a maradék négy számjegy sorrendjét szintén ismétléses permutációval határozhatjuk meg.

$$4;2;0;0;0 \Rightarrow \frac{2\cdot 4!}{3!} \Rightarrow 8$$

Csak négyessel vagy kettessel kezdődhet az ötjegyű szám, így a maradék négy számjegy sorrendjét szintén ismétléses permutációval határozhatjuk meg.

$$4;2;2;2;2 \Rightarrow \frac{5!}{4!} \Rightarrow 5$$

$$4;4;4;4;2 \Rightarrow \frac{5!}{4!} \Rightarrow 5$$ (4 pont)

Az összes eset: $6+6+24+8+5+5=\mathbf{54}$ (1 pont)

Tehát 54 féle ötjegyű számot kaphatnak. (1 pont)

c) A valószínűségszámítás klasszikus képletét alkalmazva:

$$P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = 1 - \frac{\text{kedvezőtlen}}{\text{összes}}$$ (1 pont)

Összes eset: $\binom{32}{8} = 10518300$ (1 pont)

Kedvezőtlen esetek: 0 vagy 1 darab makk van a kezében: $\binom{8}{0}\binom{24}{8}$; $\binom{8}{1}\binom{24}{7}$ (2 pont)

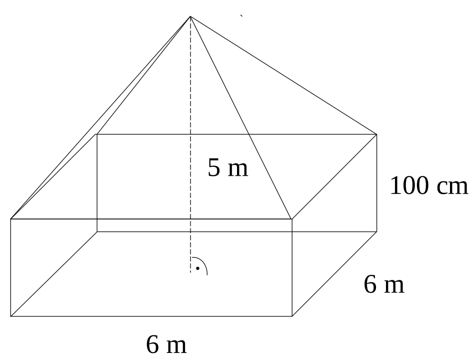
$$P = 1 - \frac{\binom{8}{0}\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} - \frac{\binom{8}{1}\binom{24}{7}}{\binom{32}{8}} = \mathbf{0{,}6668}$$ (1 pont)

Tehát a keresett valószínűség 0,6668. (1 pont)

d) Tagadás: **Van olyan, hogy Dóri nem nyer.** vagy **Nem mindig nyer Dóri.** (2 pont)

Összesen: 17 pont

17. Pali egy olyan 6 m oldalú négyzet alapú kisházat vett, aminek a tetőterét beépítették, a falakat megemelték 100 cm-rel, majd arra emelték az egyenes gúla alakú tetőt, így a tetőtér teljes magassága 5 m (lásd ábra).



a) Mekkora a beépített tetőtér légtere? (4 pont)

b) Egy bizonyos szabvány szerint „hasznos alapterület”-nek az minősül, melynek belmagassága legalább 1,2 m. Mekkora ennek a tetőtérnek a hasznos alapterülete? (6 pont)

c) Pali szeretné felújítani a tetőteret, így az alapnégyzetet parkettázni, a többi belső felületet festeni fogja. Egy m^2 parketta ára 2900 Ft, egy m^2-re jutó festék ára 860 Ft. (A nem befesthető területek összessége 8 m^2.) A parkettázásban Pisti segített egy kisebb összeg fejében, azonban a festést már egyedül végezte. Miután befejeződtek a munkálatok, azt vette észre, hogy a teljes parkettázásra fordított összeg éppen kétszerese a festésre fordított összegnek. Mennyit fizetett Pistinek a segítségért? (7 pont)

Megoldás:

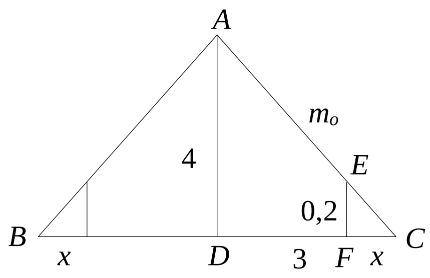
a) A gúla magassága: $5 - 1 = 4$ (1 pont)

A beépített tetőtér egy négyzetes hasábból és egy szabályos gúlából áll, tehát a térfogat:

$$\boldsymbol{V} = 6^2 \cdot 1 + \frac{6^2 \cdot 4}{3} = \mathbf{84\ m^3}$$ (2 pont)

A légtér tehát 84 m^3. (1 pont)

b) Hasonlóságot írhatunk fel a gúla síkmetszetében:



$EFC\Delta \sim ADC\Delta$, mivel két szöge biztosan egyenlő (1 pont)

$\frac{x}{0,2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{20} = 0{,}15$ m (2 pont)

$6 - 2x = 6 - 2 \cdot 0{,}15 = \frac{57}{10} = 5{,}7$ m (1 pont)

Az új alapterület:

$\boldsymbol{T} = \left(\frac{57}{10}\right)^2 = \mathbf{\frac{3249}{100} = 32{,}49\ m^2}$ (1 pont)

Tehát a hasznos alapterület 32,49 m^2. (1 pont)

c) x Ft-ot kap Pisti.

Ahhoz, hogy kiszámolhassuk a gúlát alkotó háromszögek területét, ki kell számolni a háromszögek magasságát:

$m_o = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (1 pont)

A festett terület

$T = 4 \cdot T_{\text{téglatest oldallapja}} + T_{\text{gúla palástja}} - 8$

$T = 4 \cdot 6 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} - 8 = 76\ \text{m}^2$ (1 pont)

A fizetendő összeg: $76 \cdot 860 = 65360$ Ft (1 pont)

A parkettázott terület:

$6^2 = 36\ \text{m}^2$ (1 pont)

A fizetendő összeg: $36 \cdot 2900 = 104400$ Ft (1 pont)

A szöveg alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$104400 + x = 2 \cdot 65360$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{26320\ Ft}$ (1 pont)

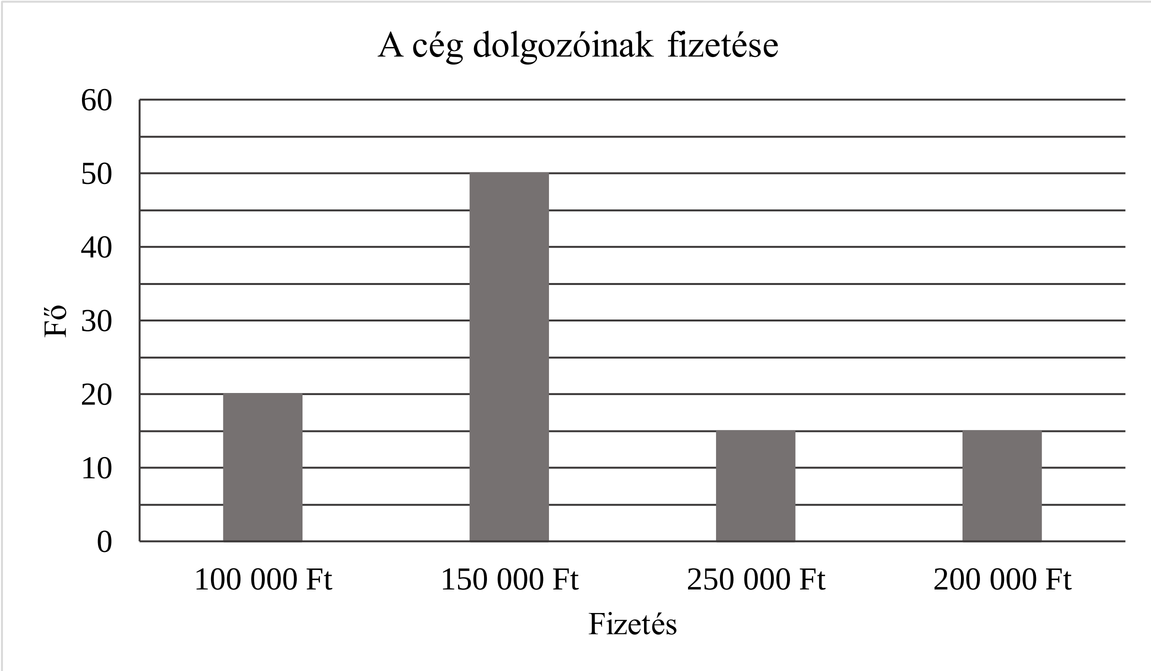
Tehát Pali Pistinek 26320 Ft-ot fizet. (1 pont)

Összesen: 17 pont

18.

a) Kinga és Timi Budapestről Siófokra utaznak a nyári nagy dugóban, a távolság 120 km. Kinga kocsival 20 km/h-val gyorsabban megy, mint Timi, aki vonattal utazik lefelé. Határozza meg, hogy Kinga mennyi idő alatt ér le Budapestről Siófokra, ha tudjuk, hogy Timi ugyanezt az utat 1 órával hosszabb idő alatt teszi meg! (5 pont)

b) Siófokon a lányok munkába állnak egy olyan 100 fős cégnél, ahol a fizetések egy hónapban a következőképpen alakulnak:



Határozza meg a dolgozók fizetésének szórását! Értelmezze a kapott eredményt! (5 pont)

c) Timi fizetése 150000 Ft, Kingáé pedig 100000 Ft lesz a hónap végén. Hányszorosára változik a sokaság átlaga, ha a lányok fizetését is beleszámoljuk? (3 pont)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogyha 2 embert véletlenszerűen kiválasztunk a dolgozók közül (Timi és Kinga is már dolgozónak számít), akkor mindkét kiválasztott ember fizetése 200000 Ft? (4 pont)

Megoldás:

a) Az út - idő - sebesség összefüggést felhasználva:

$$\left.\begin{aligned} s_K &= v_K \cdot t_K \\ s_T &= v_T \cdot t_T \end{aligned}\right\}$$

A szöveg alapján az egyenletek átírhatóak így:

$$\left.\begin{aligned} 120 &= \left(v_T + 20\right) \cdot \left(t_T - 1\right) \\ t_T &= \frac{120}{v_T} \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

A második egyenletet behelyettesítve a következő másodfokú egyenletet írhatjuk fel:

$v_T^2 + 20v_T - 2400 = 0$ (1 pont)

$v_{T1} = -60 \Rightarrow$ Ez a megoldás nem lehetséges.

$v_{T2} = 40 \Rightarrow t_T = 3 \Rightarrow t_K = t_T - 1 = \mathbf{2}$ (1 pont)

Tehát Kinga 2 óra alatt ér le Siófokra. (1 pont)

b) Először is kiszámoljuk az átlagot:

Az átlag: $\dfrac{50\cdot 150000+20\cdot 100000+15\cdot 250000+15\cdot 200000}{100}=162500$ (1 pont)

A szórás képlete alapján:

$$\sigma=\sqrt{\frac{50(150-162,5)^2+20(100-162,5)^2+15(250-162,5)^2+15(200-162,5)^2}{100}}=$$

$\mathbf{=\dfrac{5\sqrt{355}}{2}\approx 47104}$ **Ft** (3 pont)

Értelmezés: **Az átlagos 162500 Ft-os fizetéstől a dolgozók fizetése átlagosan 47104 Ft-tal tér el.** (1 pont)

c) Az új átlag:

$\dfrac{51\cdot 150000+21\cdot 100000+15\cdot 250000+15\cdot 200000}{102}=161764,71\approx 161765$ (1 pont)

$\dfrac{161765}{162500}=\mathbf{0,9955}$ (1 pont)

Azaz 0,9955-szeresére csökkent az átlagfizetés. (1 pont)

d) A kedvező esetek száma: $\binom{15}{2}$ (1 pont)

Az összes eset: $\binom{102}{2}$ (1 pont)

A valószínűségszámítás klasszikus képlete alapján:

$\boldsymbol{P}=\dfrac{\text{kedvező}}{\text{összes}}=\dfrac{\binom{15}{2}}{\binom{102}{2}}=\mathbf{0,0204}$ (1 pont)

Tehát 0,0204 a valószínűsége, hogy két 200000 Ft-os fizetésű dolgozót választunk ki véletlenszerűen. (1 pont)

Összesen 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 100 pont