MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS
– EMELT SZINT –

1. Egy atlétika csapat alapozást tart. Robbanékonyságukat és állóképességüket 50 méteres síkfutással fejlesztik. Összesen 5 fiatal sportoló idejét méri meg az edző, melyek közül az alábbi négy ismert számunkra: 5; 6; 8 valamint 5,5 másodperc.

a) Mennyi lehet az ötödik futó ideje, ha tudjuk, hogy az összes mért idő szórása 1,2 másodperc és azt is, hogy nem ő volt a leggyorsabb? (6 pont)

b) A futókat növekvő sorrendbe állítjuk az idők alapján. A következő egy hónapos edzésterv célja, hogy mindegyik futó annyi százalékot tudjon javítani saját idején, ahányadik helyet tölti be ebben a felállított sorrendben. Hogyan változik az átlag és a szórás akkor, ha sikerrel jár az edzésterv? (4 pont)

c) Ábrázolja oszlopdiagramon az eredetileg mért részidőket! (2 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) A szórás képletét alkalmazva felírható az alábbi egyenlet, melyben az ismeretlen időt x-szel jelöljük:

$$1{,}2=\sqrt{\frac{\left(5-\frac{24{,}5+x}{5}\right)^2+\left(6-\frac{24{,}5+x}{5}\right)^2+\left(8-\frac{24{,}5+x}{5}\right)^2+\left(5{,}5-\frac{24{,}5+x}{5}\right)^2+\left(x-\frac{24{,}5+x}{5}\right)^2}{5}}$$

(2 pont)

Ezen egyenlet rendezését és egy négyzetre emelést követően egy másodfokú egyenletet kapunk x ismeretlennel:

$4x^2-49x+140=0$, melynek megoldása az alábbi számpár: (2 pont)

$x_1=\frac{49-\sqrt{161}}{8}\approx 4{,}54$, valamint $x_2=\frac{49+\sqrt{161}}{8}\approx \mathbf{7{,}71}$ (1 pont)

Tehát az ötödik futó ideje **7,71másodperc,** mivel tudjuk, hogy nem ő volt a leggyorsabb.

(1 pont)

b) Az idők sorrendben: 5; 5,5; 6; 7,71; 8. (1 pont)

Ebből fakadóan az új elérendő idők a következőképpen alakulnak:

$5\cdot 0{,}99=4{,}95$

$5{,}5\cdot 0{,}98=5{,}39$

$6\cdot 0{,}97=5{,}82$ (1 pont)

$7{,}71\cdot 0{,}96=7{,}40$

$8\cdot 0{,}95=7{,}60$

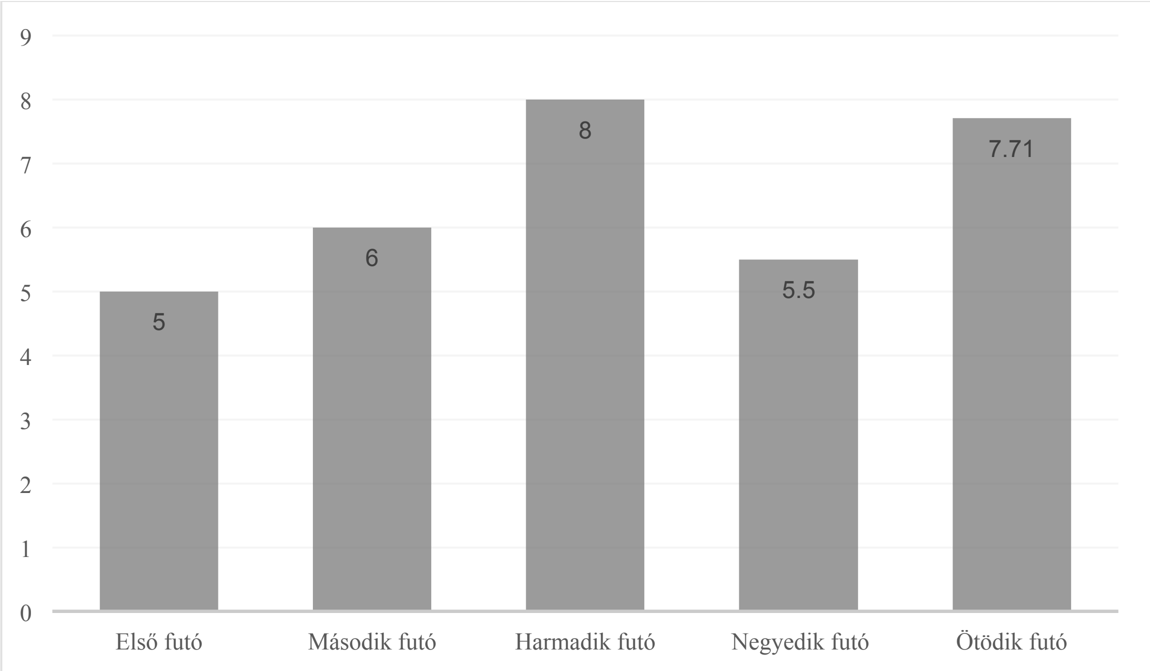
A módosult átlag tehát: $\frac{4{,}95+5{,}39+5{,}82+7{,}4+7{,}6}{5}=\mathbf{6{,}23}$. (1 pont)

A módosult szórás pedig:

$$\sqrt{\frac{(4{,}95-6{,}23)^2+(5{,}39-6{,}23)^2+(5{,}82-6{,}23)^2+(7{,}4-6{,}23)^2+(7{,}6-6{,}23)^2}{5}}=\mathbf{1{,}07}$$

(1 pont)

c) Az idők az alábbi módon ábrázolandóak:



(2 pont)

Összesen: 12 pont

2. Adott három sorozat. A_n számtani sorozatról ismert, hogy a tizenkilencedik és tizenegyedik elemének különbsége 24, a tizenharmadik eleme pedig 39-cel egyenlő. B_n számtani sorozatról tudjuk, hogy különbsége 4, első tizenkét elemének összege pedig 288. C_n sorozat elemeit úgy kapjuk meg, hogy a prímszámokból rendre kivonunk egyet.

a) Adja meg az első két sorozat explicit képletét, majd határozza meg mindhárom sorozat 20. elemét! (6 pont)

b) Mely sorozat első 10 elemének összege a legnagyobb? (4 pont)

c) Mely elemeket képzi az alábbi halmazműveletek sora, ha az egyes halmazok rendre a sorozatok az a) feladatrész szerint értelmezett elemeit tartalmazzák és egyben az alaphalmazt is jelölik: $C \setminus \left(\overline{\overline{B} \setminus A}\right)$? (4 pont)

Megoldás:

a) A_n sorozat:

$$a_{19} - a_{11} = 24 \Rightarrow a_1 + 18d - (a_1 + 10d) = 24 \Rightarrow 8d = 24 \Rightarrow d = 3$$

$$a_{13} = 39 \Rightarrow a_1 + 12d = 39 \Rightarrow a_1 = 3$$

$A_n = 3 + (n-1) \cdot 3$ (1 pont)

$A_{20} = 3 + (19) \cdot 3 = \mathbf{60}$ (1 pont)

B_n sorozat:

$$\left.\begin{array}{l} d = 4 \\ \dfrac{b_1 + b_1 + 11d}{2} \cdot 12 = 288 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 = 2$$

$B_n = 2 + (n-1) \cdot 4$ (1 pont)

$B_{20} = 2 + (19) \cdot 4 = \mathbf{78}$ (1 pont)

C_n sorozat:

Az első 20 prímszám: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71. (1 pont)

Így a sorozat 20. eleme a **70**. (1 pont)

b) A sorozatok első 10 elemének összegeit össze kell hasonlítanunk

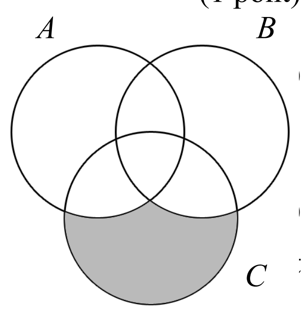
$\boldsymbol{S_{10}}(A) = \dfrac{3 + (3 + 9 \cdot 3)}{2} \cdot 10 = 165$ (1 pont)

$\boldsymbol{S_{10}}(B) = \dfrac{2 + (2 + 9 \cdot 4)}{2} \cdot 10 = 200$ (1 pont)

$\boldsymbol{S_{10}}(C) = 1 + 2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 + 18 + 22 + 28 = 119$ (1 pont)

Tehát a B_n sorozat első 10 elemének összege a legnagyobb. (1 pont)

c) A halmazműveleti jelölés az alábbi területet jelöli egy Venn-diagramon ábrázolva:



Tehát azokra az elemekre voltunk kíváncsiak, amelyeket csak és kizárólag a C_n sorozat tartalmaz:

$$C \setminus \left(\overline{\overline{B} \setminus A}\right) = \{\mathbf{1; 4; 16; 28; 40; 52}\}$$

3) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^a = |x-3| - 4$, **ha tudjuk, hogy** $a = \dfrac{(x+4)^2 + 2x}{|x^2+10x+16|}$ **(8 pont)**

b) $\sqrt{x^2-2x-8} + \sqrt{x^2+7x+10} + \sqrt{x^2-7x-18} = 0$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldalának kitevőjét egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\frac{(x+4)^2+2x}{|x^2+10x+16|} = \frac{x^2+8x+16+2x}{|x^2+10x+16|} = \frac{x^2+10x+16}{|x^2+10x+16|}$$ (1 pont)

Kikötés: $x^2+10x+16 = (x+8)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ és $x \neq -8$ (1 pont)

Ebből könnyedén látható, hogy a kitevő értéke az $x^2+10x+16 = (x+2)(x+8)$ kifejezés előjeles értékétől függően 1-et, vagy -1-et fog fölvenni, amely alapján a baloldal x-szel vagy $\frac{1}{x}$ -szel lesz egyenlő.

A jobboldalon szereplő abszolútértékes kifejezés $x = 3$ helyen vált előjelet. (1 pont)

Ezek alapján külön intervallumokat tudunk vizsgálni, melyek határai az egyes abszolútértékes kifejezések előjelváltási helyeinél lesznek: $x = -8$, az $x = -2$ és az $x = 3$ helyen. (1 pont)

I. intervallum: $x < -8$

$x = 3 - x - 4 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, amely nem esik bele az intervallum értelmezési tartományába, így nem megoldás. (1 pont)

II. intervallum: $-8 < x < -2$

$\frac{1}{x} = 3 - x - 4 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$, amely egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán. (1 pont)

III. intervallum: $-2 < x < 3$

$x = 3 - x - 4 \Rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ (1 pont)

IV. intervallum: $x \geq 3$

$x = x - 3 - 4 \Rightarrow 0 = -7$, így az egyenletnek ezen az intervallumon értelmezve sincs valós megoldása. (1 pont)

b) Az egyenlet szerint három nemnegatív szám összege nullával egyenlő, amely csak abban az esetben valósulhat meg, ha mindhárom kifejezés nullával egyenlő. (1 pont)

$x^2 - 2x - 8 = 0 = (x-4)(x+2) \Rightarrow x_1 = 4$ vagy $x_2 = -2$. (1 pont)

$x^2 + 7x + 10 = 0 = (x+5)(x+2) \Rightarrow x_3 = -5$ vagy $x_4 = -2$. (1 pont)

$x^2 - 7x - 18 = 0 = (x-9)(x+2) \Rightarrow x_5 = -9$ vagy $x_6 = -2$ (1 pont)

Jól látható, hogy az $\boldsymbol{x = -2}$ helyen mindhárom gyök alatti kifejezés nullával lesz egyenlő, így ez lesz az egyetlen megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 13 pont

4) Oldja meg az alábbi trigonometrikus egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \mathrm{tg}^{-1} x = \sin y \cdot 4\cos y$$ **(12 pont)**

Megoldás:

Bár az egyenlet két ismeretlenes, értékkészlet vizsgálatok segítségével megoldható. Először is mindkét oldalt egyszerűbb alakra hozzuk:

Baloldal: $\frac{\sin x}{\cos x} + \mathrm{tg}^{-1} x = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$, amely egy szám és reciprokának összege, így fennáll rá az alábbi összefüggés: $\left|\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x\right| \geq 2$. (3 pont)

Jobboldal: $\sin y \cdot 4\cos y = 4\sin y \cdot \cos y = 2\left(2\sin y \cdot \cos y\right) = 2\left(\sin 2y\right)$, melynek értékkészlete: $-2 \leq 2(\sin 2y) \leq 2$. (3 pont)

Így az egyenlet két oldala csak akkor lehet egyenlő, ha mind a két oldal 2-t vagy mínusz 2-t vesz fel értékül.

(2 pont)

Baloldal: $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 2 \Rightarrow \mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}x = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi}$**, ahol** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$ **.** (1 pont)

Jobboldal: $2\left(\sin 2y\right) = 2 \Rightarrow \sin 2y = 1 \Rightarrow 2y = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{\pi}{4} + l\pi}$**, ahol** $\boldsymbol{l \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

vagy

Baloldal: $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = -2 \Rightarrow \mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}x = -1 \Rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi}$**, ahol** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$ **.** (1 pont)

Jobboldal: $2\left(\sin 2y\right) = -2 \Rightarrow \sin 2y = -1 \Rightarrow 2y = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi \Rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{\pi}{4} + l\pi}$**, ahol** $\boldsymbol{l \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 51 pont

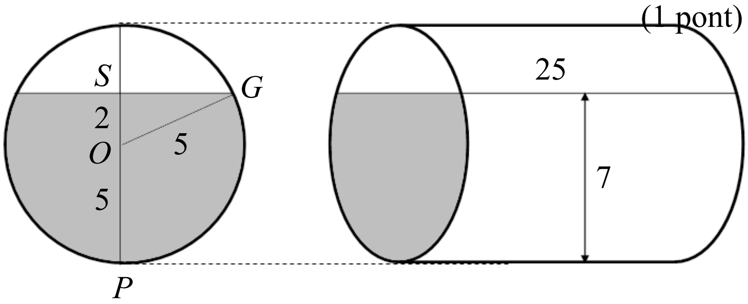
5) Adott egy 25 cm magas, 10 cm átmérőjű egyenes, zárt henger, amelybe vizet töltöttünk.

a) A hengert az oldalára fektetjük, így a vízszint a föld szintjétől mérve 7 cm lesz. Hány liter víz van a hengerben? (8 pont)

b) Állítsuk vissza az alapjára a hengert és távolítsuk el a fedelét. Mekkora átmérőjű vasgolyót kellene beleejtenünk, hogy a víz szintje 3 %-kal emelkedjen? (8 pont)

Megoldás:

a) Az oldalára fektetett hengerben a vízoszlop hossza 25 cm lesz, az alapja pedig a következő, szürkére festett síkidommal egyezik meg: (1 pont)



Ahhoz, hogy meg tudjuk állapítani a fekvő vízoszlop térfogatát, ki kell számolnunk az alap síkidom területét, amely *OSG* háromszög és *OGP* körcikk területösszegének kétszerese lesz.

OSG háromszöget területét könnyedén megkaphatjuk, ha *SG* szakasz hosszát ismerjük. Ezt a háromszögre felírt Pitagorasz tétel segítségével számítjuk ki:

$SG = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$ (1 pont)

Tehát *OSG* háromszög területe: $T_{OSG} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{21}}{2} = \sqrt{21}$. (1 pont)

OGP körcikk területének kiszámításához szükségünk van az *POG* szögre, amely *SOG* szög kiegészítő szöge lesz, így $OGP_{\angle} = 180° - SOG_{\angle} = 180° - \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{5}\right) \approx 113,58°$. (1 pont)

A körcikk területe így már számolható: $T_{\text{körcikk}} = r^2\pi \cdot \dfrac{113,58°}{360°} = 24,78$ (1 pont)

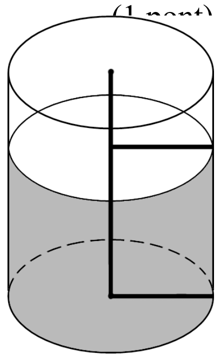
Az alapot képző síkidom területe: $T_{\text{alap}} = 2 \cdot \left(T_{OSG} + T_{\text{körcikk}}\right) = 2\left(\sqrt{21} + 24,78\right) = 58,72$ (1 pont)

Így megkaphatjuk a fekvő vízoszlop térfogatát, mivel a magasságról tudjuk, hogy 25 cm.

$V = T_{\text{alap}} \cdot m = 58,72 \cdot 25 = 1468$ (1 pont)

$1468 \text{ cm}^3 \Rightarrow 1,468 \text{ dm}^3 \Rightarrow$ **1,47 liter.** (1 pont)

b) A hengert felállítottuk az alapjára, első lépésben a vízoszlop magasságát kell kiszámolnunk, mivel alapja megegyezik a henger alapkörével: (1 pont)



$\text{V} = r^2\pi \cdot m \Rightarrow 1468 = 25\pi m \Rightarrow m = 18,7 \text{ cm}$.

A magasságnak $18,7 \cdot 0,03 = 0,561 \Rightarrow 0,561$ cm-rel kell növekednie.

Archimédész törvénye alapján, a vízbe dobott golyó térfogata megegyezik egy 0,561 cm magas vízlemez térfogatával.

Így $V_{\text{vasgolyó}} = r^2\pi \cdot 0,561 \Rightarrow \dfrac{4R^3\pi}{3} = 25\pi \cdot 0,561 \Rightarrow R = 2,191 \text{cm}$

A golyó átmérője volt a kérdés, amely a sugár kétszerese lesz: $d = 2R = 4,382 \Rightarrow$ **4,382 cm**. (1 pont)

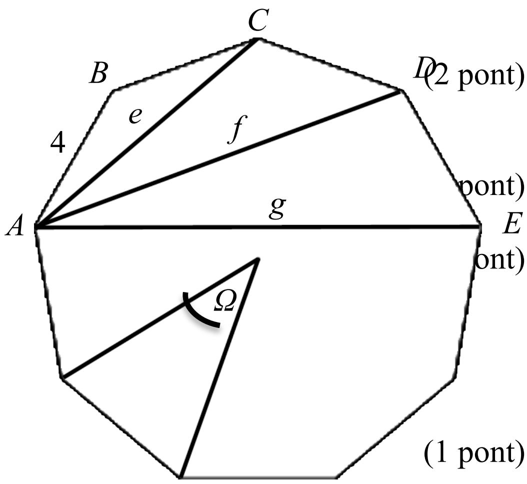
Összesen: 16 pont

6) Egy szabályos kilencszög oldala 4 cm. Hány darab különböző hosszú átlója van? Ezek milyen hosszúak? (16 pont)

Megoldás:

A szabályos kilencszög egy csúcsából pontosan $(n-3)=6$ átló húzható. (1 pont)

Ezek között, a szabályosság elve miatt, lesz három páronként megegyező hosszúságú átló. Ebből fakadóan három különböző hosszú átlót tudunk húzni egy adott csúcsból, amely kijelentés mindegyik csúcsra fennáll. (2 pont)



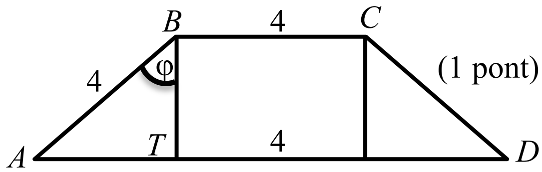
A 3 átló hosszát *ABC* egyenlő szárú háromszögből, *ABCD* egyenlő szárú trapézból és *ABCDE* ötszögből fogjuk tudni kiszámolni. pont)

A képen jelölt *Ω* szög 40°-os, mivel 9 egyenlő részre osztja a 360°-ot. ont)

Ebből fakadóan a kilencszög belső szögei egyenként: $\frac{180°-40°}{2}\cdot 2=140°$, mivel a középpontba húzott sugarak felezik ezeket a szögeket. (1 pont)

Így már *e* átló hossza könnyen számolható a koszinusz-tétel segítségével: $e^2=4^2+4^2-2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos 140°\Rightarrow e\approx \mathbf{7{,}52}\Rightarrow \mathbf{7{,}52\,cm}$. (3 pont)

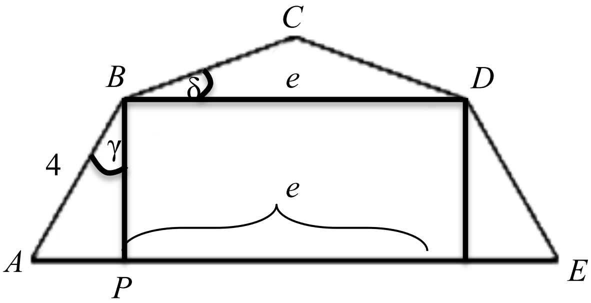
Az *f* átló hossza megegyezik az *AD* szakasz hosszával, amely az alábbi *ABCD* szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja. (1 pont)



Hosszúságát úgy kaphatjuk meg, hogy *ATB* háromszög φ szögével szemközti befogójának kétszeresét hozzáadjuk a 4-hez: $f=4+2\cdot(4\cdot\sin\varphi)$, ahol $\varphi=140°-90°=50°$. (1 pont)

Tehát az *f* átló hossza: $f=4+2\cdot(4\cdot\sin 50°)\approx \mathbf{10{,}13}\Rightarrow \mathbf{10{,}13\,cm}$. (1 pont)

A *g* átló kiszámolásához ismernünk kell *APB* háromszög γ szögével szemközti befogó hosszát: $g=e+2\cdot(4\cdot\sin\gamma)$, ahol $\gamma=50°-\left(\frac{180°-140°}{2}\right)=30°$.



$g=e+2\frac{4}{2}=e+4\approx \mathbf{11{,}52}\Rightarrow \mathbf{11{,}52\,cm}$.

(1 pont)

Tehát a három különböző átló hossza **7,52 cm, 10,13 cm** valamint **11,52 cm.**

Összesen: 16 pont

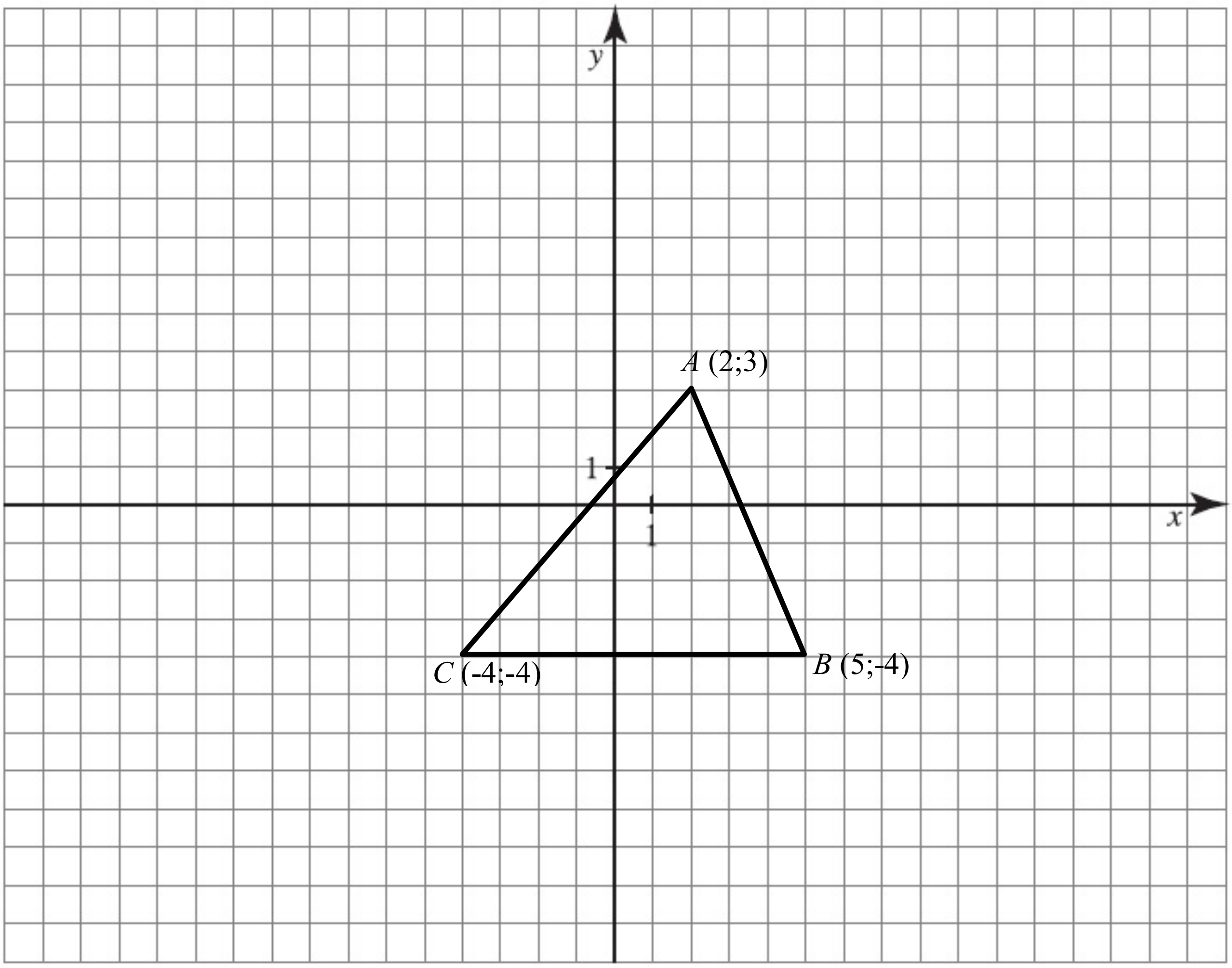
7) **Adott egy háromszög három csúcspontja egy derékszögű koordinátarendszerben: $A(2;3)$, $B(5;-4)$ valamint $C(-4;-4)$.**

a) **Adja meg a háromszög súlypontján és az origón átmenő egyenes egyenletét!** **(3 pont)**

b) **Mekkora és milyen irányú szöggel kellene elforgatnunk a háromszöget az A csúcs körül, ha azt szeretnénk, hogy az AC oldal párhuzamos legyen az ordinátatengellyel?** **(5 pont)**

c) **A háromszög területének hanyad része esik az I. síknegyedbe?** **(8 pont)**

Megoldás:



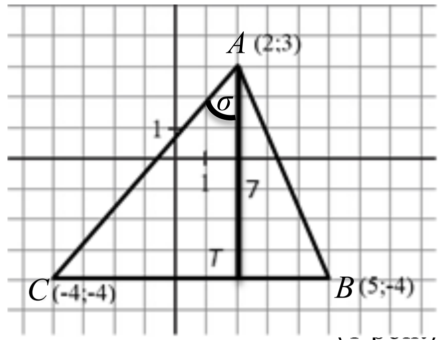
a) A két ponton átmenő egyenes egyenletét megkaphatjuk a két pont koordinátáiból. Az egyik pont az origó, a másik pedig a háromszög súlypontja, amelyet a következőképp kaphatunk meg: $S\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)=S\left(\frac{2+5+(-4)}{3};\frac{3+(-4)+(-4)}{3}\right)=\boldsymbol{S\left(1;-\frac{5}{3}\right)}$

(1 pont)

A két ponton áthaladó egyenes egyenlete: $(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ (1 pont)

Behelyettesítve a megfelelő koordinátákat: $(y-0)(1)=(x-0)\left(-\frac{5}{3}\right)\Rightarrow \boldsymbol{y+\frac{5}{3}x=0}$. (1 pont)

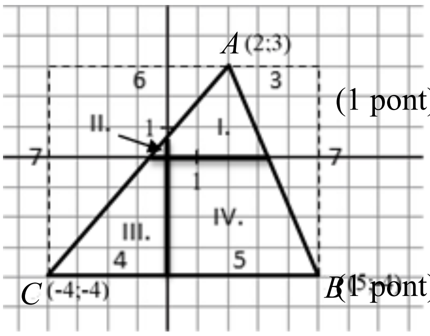
b) Mivel BC oldal párhuzamos az x-tengellyel, ezért az A csúcsból erre az oldalra bocsátott magasságvonal – AT szakasz – párhuzamos lesz y-tengellyel.
Ebből következik, hogy AC oldal –σ szöggel tér el az AT szakasz egyenesétől.
Így a háromszöget A csúcs körül σ szöggel kell elforgatnunk ahhoz, hogy az AC oldal párhuzamos legyen az y-tengellyel.



$AC = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$

$\sigma = \cos^{-1}\left(\frac{7}{AC}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{6^2+7^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{85}}\right) = \mathbf{40{,}6°}$ (1 pont)

c) A területek tekintetében úgy járunk el, hogy a teljes háromszög területéből kivonjuk a II., III. és IV. síknegyedbe eső területeket, ezek ugyanis egy derékszögű háromszögeket és két derékszögű trapézt formálnak meg.



$T_{I.} = T_{>} - \left(T_{II.} + T_{III.} + T_{IV.}\right)$

$T_{>} = 7 \cdot 9 - \frac{6 \cdot 7}{2} - \frac{3 \cdot 7}{2} = 31{,}5$ (1 pont)

$T_{II.}$ kiszámításához szükségünk van AC oldal x- és y-tengellyel vett metszéspontjaira, amelyet AC egyenletének segítségével kapunk meg.

AC: $(y-3)(-6) = (x-2)(-7) \Rightarrow 7x - 6y = -4$ (1 pont)

A metszéspontok így: $7(0) - 6y = -4 \Rightarrow \left(0; \frac{2}{3}\right)$
valamint $7x - 6(0) = -4 \Rightarrow \left(-\frac{4}{7}; 0\right)$. (1 pont)

Így $T_{II.}$ területe, amely egy derékszögű háromszög, számolható: $T_{II.} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}}{2} = \mathbf{\frac{8}{42}}$. (1 pont)

$T_{III.} = \frac{4 + \frac{4}{7}}{2} \cdot 4 = \mathbf{\frac{64}{7}}$. (1 pont)

$T_{IV.}$ kiszámításához szükség van AB oldal x-tengellyel vett metszéspontjára, melyet AB egyenletének segítségével kaphatunk meg: $AB: (y-3)(3) = (x-2)(-7) \Rightarrow \left(\frac{23}{7}; 0\right)$ (1 pont)

$T_{IV.} = \frac{5 + \frac{23}{7}}{2} \cdot 4 = \mathbf{\frac{116}{7}}$. (1 pont)

A keresett terület tehát: $T_{I.} = T_{>} - \left(T_{II.} + T_{III.} + T_{IV.}\right) = 31{,}5 - \left(\frac{8}{42} + \frac{64}{7} + \frac{116}{7}\right) \approx \mathbf{5{,}6}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) Fehér és barna kockacukrokat kevertünk össze két különböző edényben. Az elsőben 5 fehér és 4 barna, a másodikban pedig 3 fehér és 6 barna kockacukor található. Bekötött szemmel, véletlenszerűen kiveszünk egy kockát az első tárolóból, majd áttesszük azt a másodikba. Ezt a mozdulatsort visszafelé is elvégezzük.

a) Mekkora eséllyel húzunk a 2 áttételt követően barna kockacukrot az első edényből? (10 pont)

b) Mennyivel változik az esély akkor, ha a legelső húzásnál csaltunk egy picit és láttuk, hogy fehér kockacukrot húztunk? (6 pont)

Megoldás:

a) F-fel jelöljük azt, ha az adott húzásnál fehér kockacukrot, és B-vel, ha barnát húzunk. Négy különböző eseti valószínűséget kell figyelembe venni, melyek uniója lesz a megfejtés.

- FFB eset valószínűsége: $\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{81}$. (2 pont)
- FBB eset valószínűsége: $\frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{15}{81}=\frac{5}{27}$. (2 pont)
- BFB eset valószínűsége: $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{4}{90}$. (2 pont)
- BBB eset valószínsége: $\frac{4}{9}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{56}{405}$. (2 pont)

A valószínűségek uniója pedig: $\frac{8}{81}+\frac{5}{27}+\frac{4}{90}+\frac{56}{405}=\frac{73}{135}\approx 0,54$. (2 pont)

b) Az előző négy vizsgált esetből az első kettőt kell vizsgálnunk úgy, hogy biztos eseménynek vesszük azt, hogy az első kockacukor fehér volt. (2 pont)

A megváltozott valószínűség tehát: $1\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{23}{45}\approx 0,51$. (2 pont)

Így a valószínűség $\frac{23}{45}-\frac{73}{135}=-\frac{4}{135}\approx -0,0296$, tehát **0,03-dal csökkent.** (2 pont)

Összesen: 16 pont

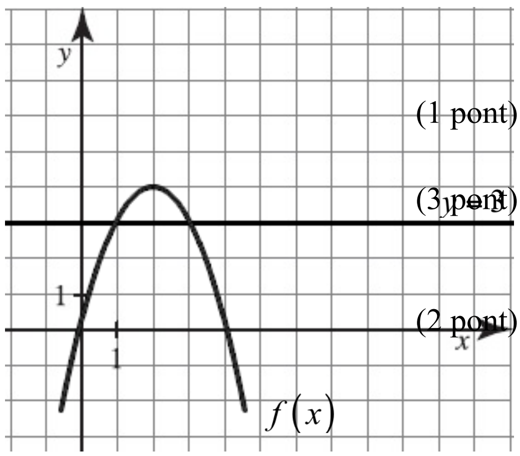
9) Adott az $f\left(x\right)=\dfrac{16x-x^3}{4+x}$ függvény. Milyen arányú területrészekre osztja az $y=3$ egyenes a függvénygörbe és az x-tengely által közbezárt területet? (16 pont)

Megoldás:

A feladatmegoldást első lépéseként egyszerűbb alakra hozzuk a függvényt:

$$f\left(x\right)=\frac{16x-x^3}{4+x}=\frac{x\left(16-x^2\right)}{4+x}=\frac{x\left(4-x\right)\left(4+x\right)}{4+x}=x\left(4-x\right)=-x^2+4x$$ (3 pont)

Így a függvény egyértelműen egy konkáv parabola, amely 0-nál és 4-nél metszi az x-tengelyt.



A területrészletek arányainak megadásához először integrálnunk kell a függvény a $\left[0;4\right]$ zárt intervallumon. (1 pont)

$$\int_0^4 x\left(4-x\right)dx=\int_0^4 -x^2+4xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_0^4$$ (3 pont)

$$\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}\right]_0^4=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{4\cdot4^2}{2}\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+\frac{4\cdot0^2}{2}\right)=\frac{32}{3}.$$ (2 pont)

A konstans egyenes két részre bontja a parabola függvénye alatti területet, a két függvény metszéspontjait kell első körben meghatároznunk.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+4x \\ y=3 \end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+4x=3\Rightarrow -\left(x^2-4x+3\right)=0=-\left(x-1\right)\left(x+3\right)=0,$$ tehát a metszéspontok $x_1=1$ és $x_2=3$. (2 pont)

A területrészek arányának meghatározásához elegendő az egyik rész területét kiszámolnunk. Vegyük észre, hogy ha a parabolát két egységgel balra és három egységgel lefelé eltolnánk, akkor az $y=3$ egyenes pont egybeesne az x-tengellyel. Így ezen területrész területe integrálszámítással számolható:

$$\int_{-1}^{1} -x^2+1dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}.$$ (2 pont)

Így a két területrész $T_1=\dfrac{4}{3}$, valamint $T_2=\dfrac{32}{3}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{28}{3}$. (2 pont)

A területek aránya tehát: $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{28}{3}}=\dfrac{4}{28}=\dfrac{1}{7}\Rightarrow \mathbf{1:7}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

Maximális elérhető pontszám: 64 pont

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 115 pont