# MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS
## – KÖZÉPSZINT –

**I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!**

**1) Adott $A(1;3)$ és $B(-7;9)$ pont. Határozza meg a két pont által alkotott szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)**

***Megoldás:***

A felezőpont első koordinátája: $\frac{-7+1}{2}=\mathbf{-3}$ (1 pont)

A felezőpont második koordinátája: $\frac{9+3}{2}=\mathbf{6}$ (1 pont)

Tehát a felezőpont koordinátái: $\mathbf{(-3;6)}$

**Összesen: 2 pont**

**2) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!**
$$-\sqrt{2x-25}=-4$$
**(2 pont)**

***Megoldás:***

Értelmezési tartomány: $2x-25\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{25}{2}$ (1 pont)

$\sqrt{2x-25}=4 \Rightarrow 2x-25=16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{x=\frac{41}{2}}$ (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**3) Egy pénzérmét egymás után háromszor feldobunk. Az alábbi kimenetelek közül melyiknek van a legkisebb valószínűsége és miért? (3 pont)**

**a) Fej, Írás, Fej**
**b) Fej, Fej, Fej**
**c) Írás, Írás, Fej**

***Megoldás:***

Pénzérme dobás esetén ugyanúgy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel dobunk fejet vagy írást. (1 pont)

Így a feladatban közölt mindhárom eset bekövetkezési valószínűsége:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0{,}125 \Rightarrow 12{,}5\%$ (1 pont)

**Ezért mindhárom eset ugyanolyan valószínűséggel fordul elő. Nincs legkisebb.** (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**4) Mi az alábbi függvény által felvehető legkisebb és legnagyobb érték?**
$$f(x)=(x-4)^2-5$$
**(2 pont)**

***Megoldás:***

A függvény képe egy konvex állású parabola.
Legnagyobb, **maximális értéke nincs.** (1 pont)

A legkisebb értékét pedig az $x=4$ helyen veszi föl, melynek értéke: $\mathbf{f(4)=-5}$. (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**5) Az alábbi exponenciális kifejezések közül melyik nagyobb?**

**a)** $81^e$

**b)** $27^\pi$ **(2 pont)**

***Megoldás:***

Ekvivalens átalakítások után megkapjuk, hogy $81^e=\left(3^4\right)^e=3^{4e}$, valamint $27^\pi=\left(3^3\right)^\pi=3^{3\pi}$

(1 pont)

Mivel $3\pi<4e$ és az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $27^\pi<81^e$, ezért az **a) jelű kifejezés nagyobb.** (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**6) Adja meg az alábbi két kör közös húrjának egyenletét!**

$$(x-2)^2+(y+6)^2=64$$
$$(x+9)^2+(y-4)^2=81$$

**(3 pont)**

***Megoldás:***

A közös húr egyenletét úgy kapjuk meg, hogy kivonjuk egymásból a körök egyenletét. (1 pont)

$\text{I.}: x^2-4x+4+y^2+12y+36=64$

$\text{II.}: x^2+18x+81+y^2-8y+16=81$

$\text{I.}-\text{II.}\Rightarrow -22x+20y=40$ (1 pont)

Tehát a keresett közös húr egyenlete: $\boldsymbol{-22x+20y=40}$ (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**7) Anna és Bori kifestenek egy szobát. Tudjuk, hogy Anna egyedül 3 óra alatt végezne a teljes munkával, míg Borinak ez 4 órát venne igénybe. A festést Anna kezdi egyedül. Egy óra elteltével Bori csatlakozik a munkához és közösen fejezik be. Mennyi ideig dolgoznak együtt?** **(3 pont)**

***Megoldás:***

| | Anna | Bori |
|---|---|---|
| Egész munka időigénye (óra) | 3 | 4 |
| Egy óra alatt elvégzett munka | 1/3 | 1/4 |

(1 pont)

A feladat szövege alapján felírható az alábbi egyenlet, ahol $x$ jelöli a közösen végzett munka időtartamát.

$1\cdot\frac{1}{3}+x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=1$ (1 pont)

Rendezés után megkapjuk az $x=\frac{8}{7}$ eredményt.

Tehát $\boldsymbol{\frac{8}{7}}$ **órát,** azaz kerekítve **68,57 percet** dolgoznak együtt. (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**8) Adja meg a 192 és az 256 legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!** **(2 pont)**

***Megoldás:***

$192 = 2^6 \cdot 3$ és $256 = 2^8$

Tehát a legnagyobb közös osztó: $\mathbf{(192;256) = 2^6 = 64}$ (1 pont)

Tehát a legkisebb közös többszörös: $\mathbf{[192;256] = 2^8 \cdot 3 = 768}$ (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

**9) Mi az értelmezési tartománya az alábbi kifejezésnek?**

$$\frac{\sqrt{3x-6}}{2x-6}$$

**(3 pont)**

***Megoldás:***

Nevező miatt: $2x-6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ (1 pont)

Gyök miatt: $3x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ (1 pont)

Tehát az értelmezési tartomány: $\boldsymbol{x \in [2;\infty[\ \backslash \{3\}}$ (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**10) Egy szabályos 17-szög összes átlóját megrajzoljuk. Ezek közül hatot sárgára színezünk. Mekkora eséllyel lesz egy véletlenszerűen kiválasztott átló sárga színű?** **(3 pont)**

***Megoldás:***

A szabályos sokszögek átlóinak számát az alábbi összefüggés segítségével számoljuk:

$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$, ahol $n$ a csúcsok számát jelöli. (1 pont)

Egy szabályos 17-szögnek $\frac{17 \cdot (17-3)}{2} = 119$ átlója van. (1 pont)

Mivel 6 sárga átló van, ezért a keresett valószínűség: $P = \frac{6}{119} \approx \mathbf{0,05}$. (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

**11) Egy számtani sorozat első eleme 6, az első 123 elem összege pedig 23247-tel egyenlő. Adja meg a sorozat differenciáját!** **(2 pont)**

***Megoldás:***

A számtani sorozat összegképletét kell alkalmaznunk:

$S_n = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1)d)}{2} n \Rightarrow \frac{6 + (6 + 122d)}{2} \cdot 123 = 23247$ (1 pont)

Az egyenletet rendezve a $\boldsymbol{d = 3}$ megoldásra jutunk. (1 pont)

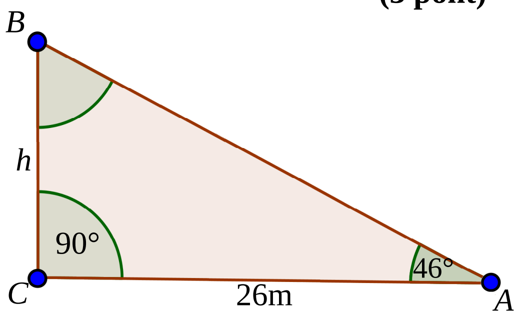
**Összesen: 2 pont**

**12) Egy 26 méterre álló torony csúcsát 46°-os látószögben látjuk. Milyen magas a torony?**

**(3 pont)**

***Megoldás*:**

A szemlélődő, a torony talapzata és csúcsa egy derékszögű háromszöget alkot, melynek egyik befogója 26 méter hosszú. (1 pont)




A tangens szögfüggvényt alkalmazva az alábbi összefüggést kapjuk:

$\mathrm{tg}46° = \dfrac{h}{26} \Rightarrow h = 26{,}92$ , ahol $h$ jelöli a torony magasságát. (1 pont)

Tehát **26,92 méter** magas a torony. (1 pont)

**Összesen: 3 pont**

***Maximális elérhető pontszám: 30 pont***

**II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!**

**13) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!**

**a)** $|x-3| = 2x^2 - 6x + 4$ **(8 pont)**

**b)** $\cos^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = -\sin^2 x$ **(4 pont)**

***Megoldás:***

a) I. $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ (1 pont)

$x-3 = 2x^2 - 6x + 4$

$2x^2 - 7x + 7 = 0$ (2 pont)

$D = 49 - 56 = -7$

Tehát az egyenletnek ezen az ágon nincs megoldása. (1 pont)

II. $x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$ (1 pont)

$3 - x = 2x^2 - 6x + 4$

$2x^2 - 5x + 1 = 0$ (1 pont)

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ (1 pont)

Tehát az egyenletnek 2 lehetséges megoldása lesz: $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$ (1 pont)

b) Kikötés: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (1 pont)

$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (1 pont)

$1 = \operatorname{tg} x$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi}$, ahol $\boldsymbol{l \in \mathbb{Z}}$. (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**14) Egy egyetemi kosárlabda csapatban felmérték a játékosok magasságát. Az adatok centiméterben mérve a következők lettek: 178; 192; 187; 169; 199; 178; 179; 165; 211; 202; 203; 190.**

**a) Adja meg és értelmezze a magasságok terjedelmét, móduszát és mediánját! (5 pont)**

**b) Számolja ki a négy nevezetes középérték közül a legkisebb és a legnagyobb érték számtani átlagát! A kapott eredményt kerekítse egy tizedesjegyre! (7 pont)**

***Megoldás:***

a) Terjedelem: $\mathbf{211-165=46}$, **azaz a legmagasabb és legalacsonyabb játékosok között 46 cm a különbség**. (1 pont)

Módusz: **178, azaz a leggyakrabban előforduló magasság 178 cm**. (2 pont)

Medián: $\mathbf{\frac{187+190}{2}=188{,}5}$, **azaz a játékosok egyik fele 188,5 cm-nél magasabb, másik fele 188,5 cm-nél alacsonyabb**. (2 pont)

b) A négy nevezetes átlag közül a legkisebb a harmonikus, a legnagyobb pedig a négyzetes. (2 pont)

Harmonikus átlag:

$$\frac{12}{2\frac{1}{178}+\frac{1}{192}+\frac{1}{187}+\frac{1}{169}+\frac{1}{199}+\frac{1}{179}+\frac{1}{165}+\frac{1}{211}+\frac{1}{202}+\frac{1}{203}+\frac{1}{190}}=186{,}74$$ (2 pont)

Négyzetes átlag:

$$\sqrt{\frac{2\cdot 178^2+192^2+187^2+169^2+199^2+178^2+179^2+165^2+211^2+202^2+203^2+190^2}{12}}=$$

$=188{,}2514$ (2 pont)

A két középérték számtani közepe pedig: $\frac{186{,}74+188{,}2514}{2}=187{,}4957\Rightarrow \mathbf{187{,}5}$ (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**15) Az alábbi másodfokú függvényt a valós számok halmazán értelmezzük:**

$$f(x) = p(x+16) + 4(p^2+4) + 2x(x-3)$$

**a) Mely *p* paraméter érték mellett lesz a függvénynek egyetlen zérushelye? (6 pont)**

**b) Milyen értéket kell adnunk *p* paraméternek, hogy a függvény görbéje ne metssze az *x* tengelyt? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) A feladatban megadott függvény képletében felbontjuk a zárójeleket, és rendezzük a tagokat az ismert $ax^2+bx+c$ alak szerint.

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + x(p-6) + 4(p+2)^2$ (2 pont)

A függvénynek csak akkor lesz egyetlen zérushelye, ha a diszkrimináns nullával egyenlő. (1 pont)

$\Rightarrow (p-6)^2 - 32(p+2)^2 = 0$

$\Rightarrow 31p^2 + 140p + 92 = 0$ (2 pont)

$\Rightarrow p_{1,2} = \dfrac{-140 \pm \sqrt{8192}}{62} = \dfrac{-70 \pm 32\sqrt{2}}{31} \Rightarrow \boldsymbol{p_1 = -3,72;\ p_2 = -0,80}$ (1 pont)

b) Ahhoz, hogy a függvény görbéje ne metssze az *x* tengelyt, a diszkriminánsnak negatív értéket kell felvennie. (1 pont)

$\Rightarrow (p-6)^2 - 32(p+2)^2 < 0$

$\Rightarrow 0 < 31p^2 + 140p + 92$ (1 pont)

Tehát a megoldás: $\boldsymbol{p < -3,72}$ **vagy** $\boldsymbol{p > -0,80}$ (4 pont)

**Összesen: 12 pont**

***Maximális elérhető pontszám: 36 pont***

**II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!**

**16) Egy egyenes alapján álló körkúpba vizet töltöttünk. A vízszint a kúp magasságának felénél áll. A kúp alapkörének átmérője 32 cm, magassága pedig 30 cm.**

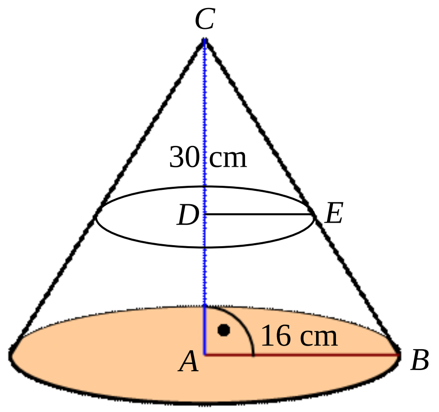
**a) Készítsen ábrát a kúpról! (2 pont)**

**b) Hány százalékát teszi ki a kúpban álló víz térfogata a kúp teljes térfogatának? (6 pont)**

**c) A zárt kúpot felállítjuk a csúcsára. Ekkor milyen magasan áll a vízszint? A kapott eredményt kerekítse két tizedesjegyre! (9 pont)**

***Megoldás:***

a)




(2 pont)

b) A vízszint a kúp magasságának felénél áll, így *DE* szakasz pontosan *ABC* háromszög középvonala, tehát 8 cm hosszú. A víztömeg térfogatát úgy kaphatjuk meg, hogy a teljes kúp térfogatából levonjuk azon kis kúp térfogatát, amely csak levegőt tartalmaz. (Hasonló módon lehet direkt módon a vízzel telt csonkakúp térfogatát is számolni.) (1 pont)

$$V_{\text{víz}} = V_{\text{nagykúp}} - V_{\text{kiskúp}} = \frac{16^2 \cdot \pi \cdot 30}{3} - \frac{8^2 \cdot \pi \cdot 15}{3} = 2240\pi$$ (1 pont)

A százalékos arány tehát: $\frac{2240\pi}{2560\pi} = \frac{7}{8} = 0{,}875 \Rightarrow \mathbf{87{,}5\%}$ (1 pont)

Egy másik lehetséges megoldási menetet jelent az arányok felhasználása. Tudjuk, hogy a kis és nagy kúp magasságának aránya $\lambda = \frac{1}{2}$. (1 pont)

Innen tudjuk, hogy térfogataik aránya $\lambda^3 = \frac{1}{8}$. (1 pont)

Tehát a csonkakúp térfogata a nagy kúp térfogatának $\frac{7}{8}$–a . (1 pont)

c) A csúcsára állított kúp esetén a víztömeg forgáskúp alakot ölt, amely forgáskúp hasonló az eredetihez. Jelölje $x$ azt az arányszámot, amellyel igazzá válik az alábbi egyenlet: (2 pont)

$$2240\pi = \frac{(x \cdot 16)^2 \cdot \pi \cdot (x \cdot 30)}{3}$$ (3 pont)

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{7}{8}}$$ (1 pont)

A kúp magassága 30 cm, így ezt meg kell szoroznunk a kapott arányszámmal. (1 pont)

Tehát a csúcsára állított kúpban a víz $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} \cdot 30 \approx$ **28,69 cm** magasan áll. (2 pont)

**Összesen: 17 pont**

**17) Egy 60 fős középiskolai közösséget vizsgálunk. Tudjuk, hogy a csoport kétharmada lány. A fiúk 18 ember kivételével nem szeretik a matekot. A lányoknak csupán az egynegyede nem szereti a matekot, a többiek imádják. Azon tanulók, akik nem szeretik a matekot, középszinten tesznek belőle érettségi vizsgát. A matekot kedvelő fiúk fele középszinten, a másik fele pedig emelt szinten szeretne érettségizni. A matekot szerető lányok egyharmada tervez középszintű vizsgát tenni, a többiek emeltre mennek.**

**a) Összesen hány tanuló fog középszinten érettségizni matekból? (2 pont)**

**b) Mekkora eséllyel megy egy véletlenszerűen kiválasztott fiú emelt szintű matematika érettségire? (4 pont)**

**c) Mekkora eséllyel lesz egy véletlenszerűen kiválasztott tanuló középszinten érettségiző lány? (4 pont)**

**d) Véletlenszerűen választunk két diákot a közösségből. Mekkora az esély arra, hogy mindketten szeretik a matekot, de középszinten érettségiznek? (4 pont)**

**e) A százalékos arányokat tekintve a fiúk vagy a lányok szeretik jobban a matekot? (3 pont)**

***Megoldás:***

a) A lányok közül tízen, a fiúk közül pedig ketten nem szeretik a matekot, illetve a matekot kedvelők közül 10 lány és 9 fiú tesz középszintű érettségi vizsgát: (1 pont)

$10+2+10+9=\mathbf{31}$, tehát összesen **31** tanuló fog érettségizni matekból. (1 pont)

b) A fiúk összesen húszan vannak, ebből kilencen mennek emelt szintű érettségire: (2 pont)

$P(B)=\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{20}}=\mathbf{0,45}\Rightarrow\mathbf{45\%}$ (2 pont)

c) A tanulók összesen hatvanan vannak. A középszinten érettségiző lányok száma húsz: (2 pont)

$P(C)=\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}=\frac{20}{60}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\approx\mathbf{0,3333}\Rightarrow\mathbf{33,33\%}$ (2 pont)

d) A matekot kedvelő, de középszinten érettségiző diákok száma 19. Ezért egy tanuló esetén ez az esély: $\frac{19}{60}$. Azonban a második választás függ az elsőtől, valamint itt is teljesülnie kell a feltételnek, de egy diákot már választottunk: (2 pont)

$P(D)=\frac{19}{60}\cdot\frac{18}{59}\Rightarrow\frac{\mathbf{57}}{\mathbf{590}}\approx\mathbf{0,0966}\Rightarrow\mathbf{9,66\%}$ (2 pont)

e) A százalékos arány a lányoknál: $\frac{30}{40}=\frac{3}{4}=0,75\Rightarrow\mathbf{75\%}$ (1 pont)

A százalékos arány a fiúknál: $\frac{18}{20}=\frac{9}{10}=0,90\Rightarrow\mathbf{90\%}$ (1 pont)

**Tehát a fiúknál nagyobb a százalékos arány**. (1 pont)

**Összesen: 17 pont**

**18) 2013. január elsején beteszünk a bankba 10 millió forintot, 8,5 %-os évi kamatra. Terveink szerint 2021 szeptemberében fogjuk egy összegben kivenni a pénzt. Az első kamat folyósítása a 2013-as év utolsó napján esedékes. A kamatot csak arra az évre írják jóvá, amely során a lekötött pénz kamatokkal együtt végig a bankban maradt.**

**a) Mennyi pénzt fog termelni a befektetett összeg végső kivételig? (4 pont)**

**b) Amennyiben 2017 márciusában mégis kivennénk a kamatokból származó többletet, mennyi pénzt tudnánk kivenni az eredetileg rögzített, végső kivételkor? (8 pont)**

**c) Legalább hány évig kellene a bankban hagynunk a pénzt, hogy egy 25 millió forintos lakásra elegendő összeg gyűljön össze? (5 pont)**

***Megoldás:***

a) Vegyük figyelembe, hogy a 2021-es kamatot nem írja jóvá a bank, mert szeptemberben vettük ki az összeget, ezért csak 8 évnyi kamattal kell számolni: (2 pont)

A pénz által termelt összeg: $10000000 \cdot 1,085^8 - 10000000 = 9206043$.

Tehát a keresett összeg: **9 206 043 Ft**. (2 pont)

b) Amennyiben 2017 márciusában kivesszük a kamatokból származó többletet, a bankban bent marad a 10 millió forint. A kérdés az, hogy ha – a banki feltételek változatlansága mellett – ez után vesszük ki 2021 szeptemberében az összeget, akkor mennyi pénzt kapunk kézhez: (4 pont)

A 2017-es év végi kamatjóváírás törlődik, így leghamarabb 2018 végén termel újra a pénzünk:

$10000000 \cdot 1,085^3 = 12772891,25 \approx$ **12 772 891 Ft** (4 pont)

c) A feladat szövege alapján az alábbi exponenciális egyenlet írható föl:

$10000000 \cdot 1,085^n = 25000000$ (1 pont)

$\Rightarrow \log_{1,085} 2,5 = n \approx 11,23$ (3 pont)

Ilyen esetekben a kapott eredményt felfelé kerekítjük, hiszen az eredmény egészrészéhez tartozó év (11) után még nincs elég pénzünk, szükség van az összeg átlépéséhez a 12. évi kamatra is, tehát legalább **12 évig** kellene a bankban hagynunk a pénzt. (1 pont)

**Összesen: 17 pont**

---

***Maximális elérhető pontszám: 34 pont***

***A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 100 pont***