MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS
-= EMELT SZINT =-

2011. január 22.

Az alábbi négy feladat megoldása kötelező!

1) Old meg az alábbi egyenlőségeket a valós számok halmazán!

a) $8x^2\left(1+\frac{1}{x^4}\right)=16-y^2+2y-1$ **(6 pont)**

b) $x^{\lg x}+10\cdot x^{-\lg x}=11$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Elsőként ki kell kötnünk a tört miatt: $x^4\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$. (1 pont)
A bal oldalon szorozzunk be x^2-el, a jobb oldalon pedig a $-y^2+2y-1$-ből emeljünk ki -1-et és alakítsuk teljesnégyzetté: $8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=16-(y-1)^2$. (1 pont)

Értékkészlet vizsgálattal oldjuk meg a példát. A bal oldalon szám és reciprokának összegét látjuk, amiről tudjuk, hogy $\left|\left(a+\frac{1}{a}\right)\right|\geq 2$. (1 pont)

Mivel ebben az esetben a egy pozitív szám a páros kitevő miatt $\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq 2$ van érvényben, azaz a baloldalnak minimuma van, ami 16. Ezt $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ esetén éri el. (1 pont)
A jobb oldalon egy pozitív szám és egy teljesnégyzet különbsége van. Azaz maximuma van, amikor a teljesnégyzet értéke nulla. Ezt $y=1$-ben éri el. (1 pont)
Tehát az egyenlet megoldásai: $\boldsymbol{x_1=1}$, $\boldsymbol{y_1=1}$ **és** $\boldsymbol{x_2=-1}$, $\boldsymbol{y_2=1}$ (1 pont)

b) Első lépésként tegyük meg a kikötést a logaritmus miatt: $x>0$. (1 pont)
Helyettesítsünk be új ismeretlent: $x^{\lg x}=a$, $\Rightarrow a+10\cdot a^{-1}=11$. Beszorozhatunk a-val mivel tudjuk, hogy nem nulla, utána rendezzük az egyenletet: $a^2-11a+10=0$.(1 pont)
Másodfokú megoldóképletből kijön a két gyök a-ra: $a_1=1$ és $a_2=10$. (1 pont)
$a_1=1$ esetén $x^{\lg x}=1 \Rightarrow x^{\lg x}=x^0$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $\lg x=0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1=1}$. (1 pont)
$a_2=10$ esetén $x^{\lg x}=10 \Rightarrow \lg x^{\lg x}=\lg 10 \Rightarrow \lg x\cdot\lg x=1 \Rightarrow \lg x=\pm 1$. (1 pont)
$\lg x=1$ esetén $\boldsymbol{x_2=10}$ és $\lg x=-1$ esetén $\boldsymbol{x_3=0{,}1}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

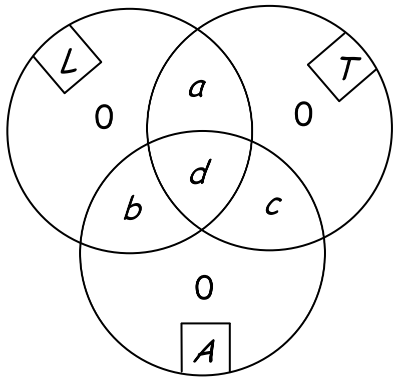
2) Az iskolai sportegyesületnek három szakosztálya van (labdarúgó, tájfutó és asztalitenisz), melyekben mind a 81 tanuló sportol. Tudjuk, hogy minden tag legalább két szakosztályba jár. Kétszer annyi labdarúgó van, mint tájfutó, és aki

tájfutó, az egyúttal asztaliteniszezik is. A labdarúgó és a tájfutó szakosztály együttes taglétszáma megegyezik az asztalitenisz szakosztály taglétszámával.

a) Hány tagja van az egyes szakosztályoknak? (6 pont)

b) Ha kiválasztok a 81 sportoló közül 10-et, mekkora annak a valószínűsége, hogy közöttük legfeljebb 2-en tájfutók? (6 pont)

Megoldás:



a) Az 1. feltételből következik, hogy csak az *a, b, c* és *d* tartományokban lehetnek nullától különböző számok. (1 pont)

A labdarúgók száma: $a+b+d$, a tájékozódási futók száma: $a+c+d$. A 2. feltétel szerint: $a+b+d=2\cdot(a+c+d)$. (1 pont)

A 3. feltétel miatt: $a=0$. (1 pont)

A 4. feltétel miatt: $a+b+d+a+c+d=b+c+d$ (1 pont)

E három egyenletből megkapjuk, hogy $d=0$, $b=2c$ és $b+c=81$. Azaz $c=27$ és $b=54$. (1 pont)

Tehát a labdarúgó szakosztályban **54 tag** van, a tájékozódási futók **27**-en vannak, az asztaliteniszezők létszáma pedig **81**. (1 pont)

b) 3 lehetőséget különböztetünk meg. (1 pont)

Első lehetőség valószínűsége, amikor pontosan kettő tájfutó van:

$$P(A)=\frac{\binom{27}{2}\cdot\binom{54}{8}}{\binom{81}{10}}=0{,}194.$$ (1 pont)

Második lehetőség valószínűsége, amikor pontosan egy tájfutó van:

$$P(B)=\frac{\binom{27}{1}\cdot\binom{54}{9}}{\binom{81}{10}}=0{,}076.$$ (1 pont)

Harmadik lehetőség valószínűsége, amikor nincs tájfutó: $P(C)=\dfrac{\binom{27}{0}\cdot\binom{54}{10}}{\binom{81}{10}}=0{,}01$.

(1 pont)

A keresett valószínűség ezek összege: $P(A)+P(B)+P(C)=$ **0,2838**. (2 pont)

Összesen: 12 pont

3) Legyen $f(x)$ és $g(x)$ is a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{ha, } x\le -4\\ (x+2)^2-3 & \text{ha, } -4<x<1\\ 6 & \text{ha, } 1\le x\end{cases}\qquad g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$$

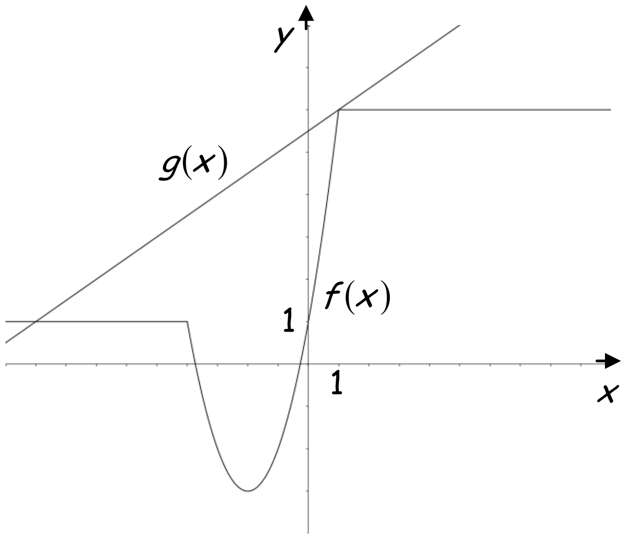
a) Ábrázold ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét függvényt! Add meg az $f(x)=g(x)$ egyenlet megoldásait! (6 pont)

b) Számítsd ki a két függvény által közre fogott, zárt síkidom területét! (8 pont)

Megoldás:

a) A függvények ábrázolása. (2 pont)

Az egyenlet megoldásai, valójában a két függvény érintési- vagy metszéspontjai.



Első eset: $x\le -4$:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=y=1\\ g(x)&=y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}\end{aligned}\right\}\ \text{egyenletrendszer}$$

megoldása $x=-9$ és $y=1$. (1 pont)

Második eset: $-4<x<1$:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=y=(x+2)^2-3\\ g(x)&=y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}\end{aligned}\right\}\ \text{egyenletrendszer}$$

gyökei $x_1=1$ és $x_2=-\frac{9}{2}$. x_1 és x_2 nincsen benne az $-4<x<1$ intervallumban, tehát nem megoldások. (1 pont)

Harmadik eset $1\le x$:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=y=6\\ g(x)&=y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}\end{aligned}\right\}\ \text{egyenletrendszer megoldása } x=1 \text{ és } y=6.$$ (1 pont)

Tehát a keresett megoldás párok: $x_1=-9$, $y_1=1$ és $x_2=1$, $y_2=6$. (1 pont)

b) Két részre bontjuk a síkidomot. A $[-9;-4]$ intervallumon van egy derékszögű háromszögünk. (1 pont)

Az egyik befogónk hossza az intervallum terjedelme, azaz 5. A Másik befogó hosszát úgy kapjuk meg, hogy a -4-et behelyettesítjük $g(x)$ függvénybe – így megkapjuk a háromszög felső csúcsának y koordinátáját. Ez 3,5-öt ad eredményül, de ebből még kivonunk 1-et, mivel nem az x tengelytől számítjuk, hanem az $f(x)=1$-től. Tehát a két befogó 5 és 2,5. (1 pont)

Háromszög területe: $T_1=\frac{5\cdot 2{,}5}{2}=6{,}25$ (1 pont)

$]-4;1[$ intervallumon lévő síkidom területét integrálás segítségével kapjuk. De előtte feltoljuk mindkét függvényt 3 egységgel y tengely mentén, hogy ne legyen x tengely alatti rész. Így kapjuk a következő hozzárendeléseket: $f(x)+3=x^2+4x+4$ és $g(x)+3=\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}$. (2 pont)

A két függvény integráltjának különbsége adja a keresett területet. Alkalmazzuk a Newton-Leibniz-formulát:

$$T_2=\int_{-4}^{1} f(x)+3\mathrm{d}x-\int_{-4}^{1} g(x)+3\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{17}{2}x\right]_{-4}^{1}-\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{-4}^{1}=$$

$\frac{155}{4}-\frac{35}{3}=27{,}083$ (2 pont)

$T=T_1+T_2=6{,}25+27{,}083=$ **33,3 területegység**. (1 pont)

Összesem: 14 pont

4) A Szabadság híd budai hídfőjénél sétálgatva tájolóval megmérjük, hogy az úticélként kitűzött Közraktár tér (K) és a jobb kéz felé eső BME (B) közti szakasz 60°-os szögben, illetve a Közraktár tér és a bal kéz felé eső Corvinus Egyetem (C) közti szakasz pedig 45°-os szögben látszik. A térképen lemérjük, hogy a CKB szög 120°-os, a CK távolság 2800 m, a KB távolság pedig 3600 m. Számítsd ki, mekkora távolságban vagyunk légvonalban a Közraktár tértől, ha feltételezhetjük, hogy a C, K és B helyek a hídfővel azonos tengerszint feletti magasságban vannak! (13 pont)

Megoldás:

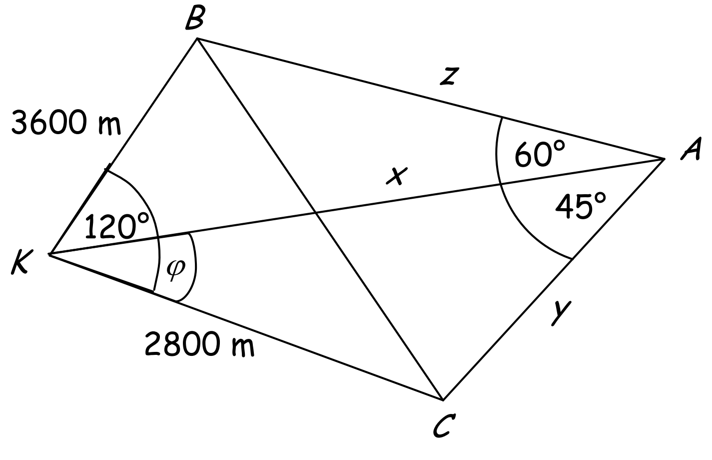
Az AKC háromszögből szinusztétellel: $\frac{x}{2800}=\frac{\sin(180^\circ-45^\circ-\varphi)}{\sin 45^\circ}$, az ABK háromszögből pedig: $\frac{x}{3600}=\frac{\sin(180^\circ-(120^\circ-\varphi)-60^\circ)}{\sin 60^\circ}$. (2 pont)

Mindkét egyenletből x-et kifejezve, a kapott kifejezések egyenlőségéből: $2800\cdot\frac{\sin(180^\circ-45^\circ-\varphi)}{\sin 45^\circ}=3600\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin 60^\circ}$. (2 pont)

Egyszerűsítés, a közös nevezővel való szorzás és az addíciós képletből való behelyettesítés után:

$$7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)=\frac{9}{\sqrt{2}}\sin\varphi$$

(3 pont)



$\cos\varphi$-t és $\sin\varphi$ egy-egy oldalra rendezve, kapjuk $(18-7\sqrt{3})\sin\varphi=7\sqrt{3}\cos\varphi$. (2 pont)

$\cos\varphi$ nem nulla, mivel akkor $\sin\varphi$-nek is nullának kell lennie, de ez egyszerre nem teljesülhet. És ha nem nulla, akkor leoszthatunk vele. $\cos\varphi$-vel és $\left(18-7\sqrt{3}\right)$ osztva, azaz $\operatorname{tg}\varphi = \frac{7\sqrt{3}}{18-7\sqrt{3}} = 2{,}0635$. És $\varphi = 64{,}14°$. (2 pont)

A keresett távolság $x = 3600 \cdot \frac{\sin 64{,}14°}{\sin 60°}$, azaz $\boldsymbol{x} = \mathbf{3740{,}79}$ **m**. (2 pont)

Összesen: 13 pont

A kötelező négy példa összesen: 51 pont

<u>Az alábbi öt feladat közül négyet kell kiválasztanod és megoldanod!</u>

5) Egy főiskola I. évfolyamán a nappali tagozatos hallgatók 15% -a jelesre vizsgázott statisztikából. A levelező tagozaton 30% , míg a távoktatáson résztvevőknél 10% volt a jelesek részaránya. Az egyes tagozatok létszámáról tudjuk, hogy kétszer annyi távoktatásban résztvevő van, mint levelező, és a nappalisok és a távoktatáson résztvevők egyenlő számban vannak.

a) Véletlenszerűen választva egy hallgatót, mekkora az esélye, hogy a statisztika jegye jeles? (10 pont)

b) Ha a választott hallgató jegye jeles, akkor mi az esélye, hogy ő nappalis, levelező, illetve távoktatásban résztvevő? (6 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) Nappali tagozatosok száma legyen x, levelezősök száma y és távoktatásban részt vevők z. Így rendre a jelesre vizsgázott hallgatók száma $0{,}15x$, $0{,}3y$ és $0{,}1z$. (3 pont)

Továbbá a feladat szövegéből tudjuk, hogy $z = x = 2y$ (1 pont)

Az összes hallgatók száma: $x + y + z = 2y + y + 2y = 5y$ (2 pont)

Jeles hallgatók: $0{,}15x + 0{,}3y + 0{,}1z = 0{,}3y + 0{,}3y + 0{,}2y = 0{,}8y$ (2 pont)

A keresett valószínűség: $P = \frac{0{,}8y}{5y} = \mathbf{0{,}16}$ (2 pont)

b) Az összes jeles hallgató száma $0{,}8y$. A nappali jeles hallgatók száma $0{,}15x = 0{,}3y$, levelezős jeles hallgatók száma $0{,}3y$ és a távoktatásban résztvevő jeles hallgatók száma $0{,}1z = 0{,}2y$. (2 pont)

A keresett valószínűségek:

$P(n) = \frac{0{,}3y}{0{,}8y} = \mathbf{0{,}375}$ (1 pont)

$P(l) = \frac{0{,}3y}{0{,}8y} = \mathbf{0{,}375}$ (1 pont)

$P(t) = \frac{0{,}2y}{0{,}8y} = \mathbf{0{,}25}$ (1 pont)

Tehát annak a valószínűsége, hogy a választott jeles tanuló nappalis **0,375**, annak, hogy levelezős szintén **0,375** és annak, hogy távoktatásban résztvevő **0,25**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Az A és B helység közötti távolság 72 km, 6 órakor A-ból B-be egy autóbusz indul el, majd egy óra múlva egy kerékpáros. Az autóbusz B-ben 20 percet áll, majd visszaindul A-ba, és a kerékpárossal 9 óra 40 perckor találkozik. Az autóbusz A-ban 40 percet áll, majd ismét elindul B-be, és ez alkalommal a kerékpárost 12 óra 20 perckor éri utol. Számítsd ki az autóbusz és a kerékpár átlagsebességét! (16 pont)

Megoldás:

Ha a kerékpáros x km utat tett meg az első találkozásig, akkor a busz $(144-x)$ km-t.

(1 pont)

Mivel az átlagsebesség kiszámítása során az összes utat kell elosztani az összes idővel, a busz várakozásait is bele kell venni az átlagsebességébe.

A kerékpáros számára $2\frac{2}{3}$ óra telt el, a busznak $3\frac{2}{3}$ óra telt el az indulás óta. Így sebességük $v_k=\frac{3x}{8}\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és $v_b=\frac{3(144-x)}{11}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. (3 pont)

Ha a második találkozásig a kerékpáros y km-t, akkor a busz $(144+y)$ km-t tett meg

(1 pont)

a kerékpáros $5\frac{1}{3}$ és a busz pedig $6\frac{1}{3}$ órát volt úton (2 pont)

Így sebességük: $v_k=\frac{3y}{16}\frac{\text{km}}{\text{h}}$ és $v_b=\frac{3(144+y)}{19}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. (3 pont)

A $\frac{3x}{8}=\frac{3y}{16}$ egyenletből $y=2x$. (2 pont)

A $\frac{3(144-x)}{11}=\frac{3(144+y)}{19}$ egyenletből $x=28{,}10$. (2 pont)

Ezt felhasználva a keresett sebességek (amik egyben az átlag sebességek) $\mathbf{v_b=31{,}61\frac{km}{h}}$ és $\mathbf{v_k=10{,}54\frac{km}{h}}$. (2 pont)

Összesen: 16 pont

7) Egy gimnazista fiú meglepetés gyanánt Nizzát nézte ki, mint potenciális nyaralási helyszín barátnője és saját maga számára, ami 550 000 forintba kerül kettőjüknek.

a) Mivel már hosszabb ideje tervezi a nyaralást így némi félrerakott pénze is akad összesen 400 000 forint. Ha ezt befektetné évi 17%-os kamatra, akkor mennyi idő múlva mehetnének el Nizzába nyaralni? (6 pont)

b) Ha a hiányzó 150 000 forintot személyi kölcsönként venné fel, ami évi 24%-os kamatot jelent számára és havi részletekben kéne visszafizetnie két év alatt, akkor mennyit fizetne havonta?
(A bank havi elszámolású kamatos kamattal számol.) (10 pont)

***Megoldás*:**

a) A gimnazista fiúnak az n. év végére $400000 \cdot 1{,}17^n$ forintja lesz. (1 pont)
Ennek a vagyonnak kell elérnie az 550 000 forintot. (1 pont)
Tehát: $400\,000 \cdot 1{,}17^n \geq 550\,000 \Rightarrow 1{,}17^n \geq 1{,}375$ (1 pont)
Mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve: $n \geq \frac{\lg 1{,}375}{\lg 1{,}17} \Rightarrow n \geq 2{,}03$ (2 pont)
Tehát **3 év után** viheti el barátnőjét Nizzába. (1 pont)

b) Éves kamatból a havi kamat: $\sqrt[12]{1{,}24} = 1{,}0181$, azaz $1{,}81\%$. (2 pont)
Az ismeretlen törlesztő részlet legyen x.
$(((150000 \cdot 1{,}0181 - x) \cdot 1{,}0181 - x)\ldots) \cdot 1{,}0181 - x = 0$ (1 pont)
Az utolsó törlesztő részlet befizetése után fogy el az adósság. Elvégezve a beszorzásokat:
$150000 \cdot 1{,}0181^{24} - x\left(1{,}0181^{23} + 1{,}0181^{22} + \ldots + 1{,}0181 + 1\right) = 0$ (2 pont)
A záronjelen belül lévő mértani sorozatra az összegképletet alkalmazva: (1 pont)
$150000 \cdot 1{,}0181^{24} - x\frac{1{,}0181^{24} - 1}{1{,}0181 - 1} = 0$. (2 pont)
x-re rendezve: $x = \frac{150000 \cdot 1{,}0181^{24}}{29{,}73} = \mathbf{7761{,}00}$. (1 pont)
Tehát havonta **7761** forintot kell fizetnie 24 hónapon keresztül. (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) Egy sítábor szervezői apróbb statisztikával kedveskedtek azok számára, akik az idei év során gondolkodóba estek, hogy részt vegyenek-e. Az alábbi táblázat a tavalyi táborban résztvevők költségeinek összességét mutatja be:

Sítábor alatt elköltött összeg (ezer forintban)	**68**	**108**	**154**	**184**	**225**
Táborozók száma	**11**	**33**	**35**	**22**	**9**

a) Ábrázold a tavalyi résztvevők költségeinek eloszlását oszlopdiagramon! (2 pont)

b) Mennyi volt a tavalyi költségek átlaga és szórása? Értelmezd is őket! (5 pont)

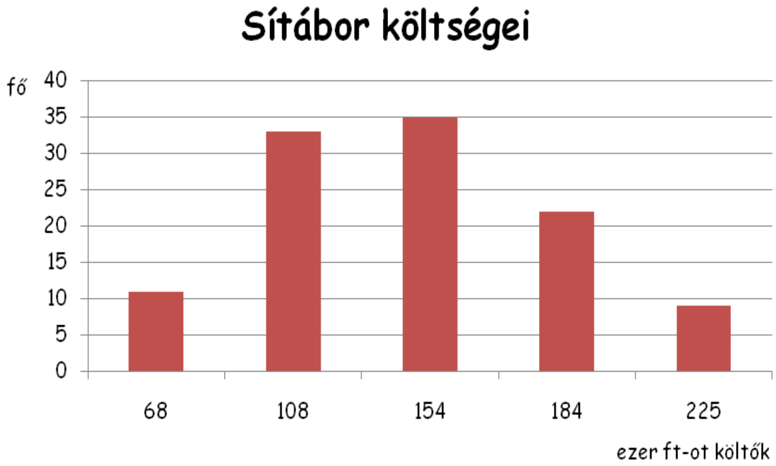
c) Az idei évben 2500 Ft-tal nőtt a tábor ára. Hogyan fog változni a résztvevők költségeinek szórása és átlaga, amennyiben azt feltételezzük, hogy mindenki számára a tavalyival megegyező „egyéb” költségek merülnek fel? Válaszod indokold! (3 pont)

d) Előfordulhatott-e, hogy a „legtöbbet költők” társaságában mindenki pontosan 3 embernek árulta el az általa elköltött pénzmennyiséget, amennyiben tudjuk, hogy ha valaki megbízik a másikban annyira, hogy elárulja azt, akkor a gesztust viszonozva a másik is elárulja a költségei nagyságát? (3 pont)

e) Tagadd az alábbi mondatot: „Nincs olyan év, hogy Dávid ne lenne a legtöbbet költők csoportjában.” (3 pont)

***Megoldás*:**

a)



(2 pont)

b) $\overline{y}=\dfrac{11\cdot 68000+33\cdot 108000+35\cdot 154000+22\cdot 184000+9\cdot 225000}{11+33+35+22+9}=143\,409{,}09$

(1 pont)

Tehát átlagosan a tavalyi sítáborban **143 409** forintot költöttek a résztvevők. (1 pont)

$\sigma=\sqrt{\dfrac{11\cdot(68000-143\,409{,}09)^2+\ldots+9\cdot(225000-143409{,}09)^2}{110}}=43065{,}97$ (2 pont)

Tehát a résztvevők átlagos költségei a tavalyi sítáborban **43 065,97** forinttal tértek el a tábori átlagtól. (1 pont)

c) Az **átlag 2500 forinttal nő,** hiszen ha minden résztvevőnek plusz 2500 forint költsége lesz, akkor a teljes átlag is nő 2500 forinttal. **A szórás változatlan** marad, hiszen a 2500 forinttal magasabb átlagtól a megnövekedett költségek azonos mértékben fognak eltérni. (3 pont)

d) A „legtöbbet költők társaságát" egy olyan gráffal modellezzük, ahol a pontok az embereket jelölik, a két pont összekötése pedig azt jelenti, hogy az a két ember kölcsönösen elárulta egymásnak, hogy melyik csoportba tartoznak. Ekkor egy olyan 9 pontú gráfot kapunk, melyben minden pont fokszáma 3. Ekkor a páratlan fokszámú pontok száma páratlan lenne, ami nem lehetséges. Tehát ez az eset **nem fordulhat elő**.

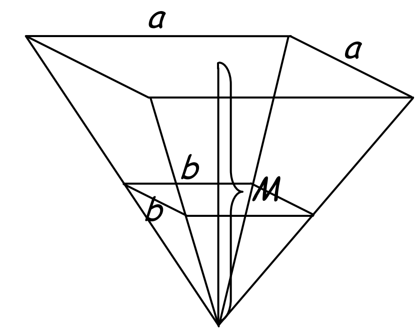
(3 pont)

e) **Van olyan év, hogy Dávid nem a legtöbbet költők társaságába tartozik.** (3 pont)

Összesen: 16 pont

9) A 20 cm magasságú, 18 cm alapélű, négyzet alapú szabályos gúlát az alaplapjával felfelé fordítjuk, és a magasság feléig megtöltjük vízzel. Ezután lezárjuk, és a gúlát az alaplapjára fordítva lerakjuk az asztalra. Milyen magasan áll benne a víz? (16 pont)

Megoldás:

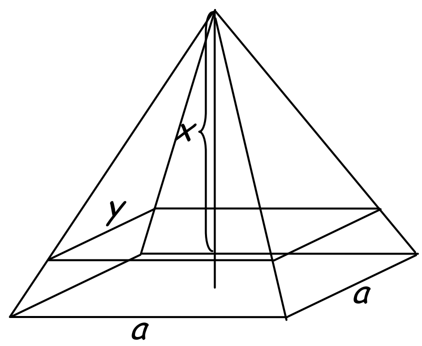


Az eredeti gúla térfogata $V_{gúla} = \frac{18^2 \cdot 20}{3} = 2160\ cm^3$.

(1 pont)

A beleöntött víz térfogatához először meg kell határoznunk a b oldalt, mely a hasonlóság miatt az a oldal fele, tehát 9. (1 pont)

Így $V_{víz} = \frac{9^2 \cdot 10}{3} = 270\ cm^3$. (2 pont)



Megfordítás után a hasonlóság miatt $\frac{x}{20} = \frac{y}{18}$, ahonnan $y = 0{,}9x$. (4 pont)

A felső gúla térfogata $V_{felső} = 2160 - 270 = 1890\ cm^3$.

(2 pont)

A térfogat képletével számolva $1890 = \frac{y^2 \cdot x}{3}$, melybe beírva az előző összefüggést $1890 = \frac{0{,}81x^3}{3}$. (4 pont)

Ahonnan $x = \sqrt[3]{7000} = 19{,}13\ cm$. (1 pont)

A víz tehát kb. **9 mm** magasan áll a gúlában. (1 pont)

Összesen: 16 pont

A második 5 feladatból 4-et kellett választani, ez összesen: 64 pont

Összesen: 115 pont